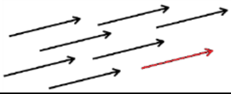
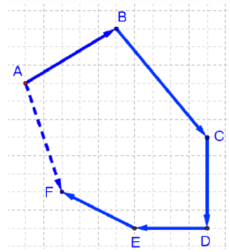
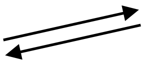
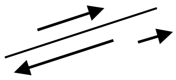
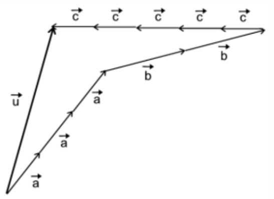
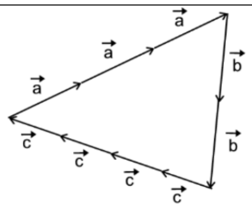
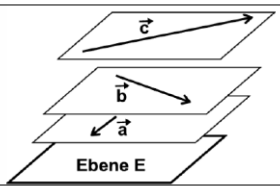
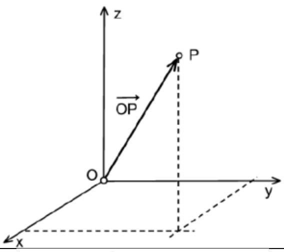
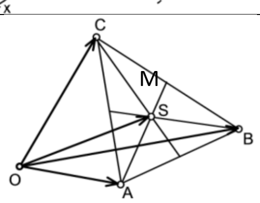
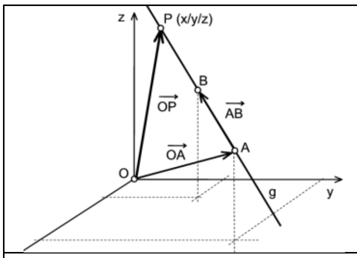
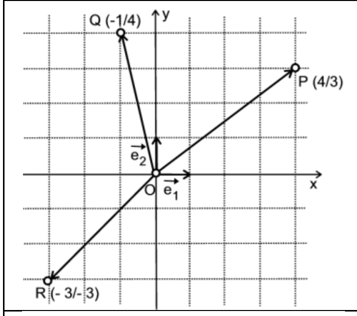
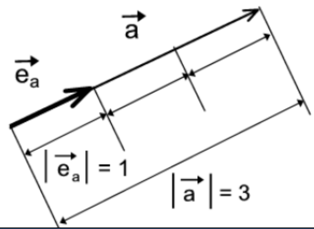
VEKTORGEOMETRIE

1 Definitionen

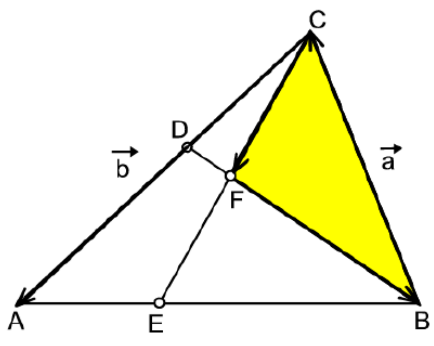
	Vektor	**Parallelverschiebung**, Pfeil(e) mit Länge und Richtung. Länge eines Vektors $\vec{a}$ = $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ = $\lvert\vec{a}\rvert$
	Freier Vektor	Vektor, bei dem der Ausgangspunkt gleichgültig ist.
	Repräsentant	Jeder Pfeil einer Vektormenge.
	Vektorkette	Die Addition von mehreren Vektoren. Resultierende = Vektor $\overrightarrow{AF}$
	Geschlossene Vektorkette	Resultierende = Nullvektor $\vec{0}$
	Nullvektor	Den zur identischen Abbildung gehörende Vektor.
	Gegenvektor	$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \rightarrow -\vec{a} = \overrightarrow{BA}$
	Kollinear	Wenn sie zu einer Geraden parallel sind. Parallel oder Antiparallel
	Linear-kombination	Vektor $\vec{u}$ ist eine Linearkombination aus anderen Vektoren $\vec{u_1} = k_1 * \vec{a} + k_2 * \vec{b} + k_3 * \vec{c}$
	Nullsumme	Eine Linearkombination die den Nullvektor ergibt. $\vec{0} = k_1 * \vec{a} + k_2 * \vec{b} + k_3 * \vec{c}$
	Triviale Nullsumme	$\vec{0} = 0 * \vec{a} + 0 * \vec{b} + 0 * \vec{c}$
	Linear abhängig	Wenn ein Vektor mit den anderen Vektoren dargestellt werden kann.
	Komplanare Vektoren	Wenn Vektoren zu einer Ebene parallel sind. Haben sie den gleichen Anfangspunkt, liegen sie auf einer Ebene.
	Ortsvektor	Der Vektor vom Koordinatenursprung O zum Punkt P heisst Ortsvektor des Punktes P. Die Differenz zweier Ortsvektoren ist ein freier Vektor.
	Ortsvektor im Dreieck	Mittelpunkt: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
		Schwerpunkt: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

	Vektorielle Darstellung einer Geraden	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t * \overrightarrow{AB}$		
	Orthonormalbasis einer Ebene	$\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ sind rechtwinklig und haben die Länge 1.		
	Linear-kombination	$\overrightarrow{OP} = 4 * \vec{e_1} + 3 * \vec{e_2}$		
	Vektorielle Komponente	$4 * \vec{e_1}$, $3 * \vec{e_2}$	$\vec{e_1} = \binom{1}{0}$	$\vec{e_2} = \binom{0}{1}$
	Skalare Komponenten	4,3		
	Einheitsvektor	Vektor mit dem Betrag 1 $\quad \vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\overrightarrow{PQ} = \binom{6-3}{2-6} = \binom{3}{-4}$ $\overrightarrow{PQ} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}$=5 $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$		

2 Operationen

Addition	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	Kommutativgesetz gültig: Assoziativgesetz gültig:	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\vec{a} + [\vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a} + \vec{b}] + \vec{c}$
Subtraktion	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$	Subtraktion = Addition des Gegenvektors Differenz = Endpunkt minus Anfangspunkt	$\lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert$ $\overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$
Multiplikation	$3 * \vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$	Distributiv- und Assoziativg. gültig	$0 * \vec{a} = \vec{0} \quad -1 * \vec{a} = -\vec{a}$

3 Teilverhältnisse

1. Wahl von zwei nicht kollinearen Vektoren	$\vec{a} = \overrightarrow{BC}; \vec{b} = \overrightarrow{CA};$	
2. Bildung einer geschlossenen Vektorkette mit Punkt F	$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \vec{0}$	
3. Die drei Vektoren mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken (x und y einführen)	$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ $\overrightarrow{CF} = x * (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE})$ $\overrightarrow{FB} = y * (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$	
4. Gleichungssystem für die beiden Unbekannten x und y	$\vec{0} = \vec{a} * (..) + \vec{b}(..)$ $\left\lvert \begin{matrix} .. = .. \\ .. = .. \end{matrix} \right\rvert$	

4 Darstellungen

Komponentendarstellung		$\vec{r_p} = a_1 * \vec{e_1} + a_2 * \vec{e_2}$	
Koordinatendarstellung	eines Vektors	$\vec{r_p} = \binom{2}{1}$	$\vec{0} = \binom{0}{0}$
	eines Punktes	$P = (2 \mid 1)$	

5 Kollineare Vektoren herausfinden

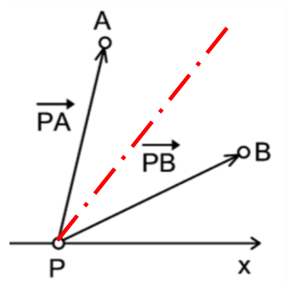
Idee:	$\boldsymbol{\vec{a} = x * \vec{b}}$	Lösung:	$\binom{6}{9} = \boldsymbol{x} * \binom{-2}{-3}$	
			$\begin{vmatrix} 6 = -2x \\ 9 = -3x \end{vmatrix}$	$x = -3$ $x = -3$

6 Zerlegung eines Vektors

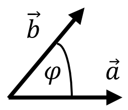
Gegeben:	$\vec{c} = \binom{7}{-1}, \vec{a} = \binom{5}{3}, \vec{b} = \binom{-4}{-5}$	Lösung:	$\binom{7}{-1} = x * \binom{5}{3} + y * \binom{-4}{-5}$ $\begin{vmatrix} 7 = 5x - 4y \\ -1 = 3x - 5y \end{vmatrix}$
Idee:	$\boldsymbol{\vec{c} = x * \vec{a} + y * \vec{b}}$		

7 Mittelsenkrechte (Abstand: Punkt zu Punkt)

Gegeben:	$A(0\|6), B(10\|12), P(x\|0)$	
Idee:	$\left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \left\|\overrightarrow{PB}\right\|$	
Lösung:	$\overrightarrow{PA} = \binom{-x}{6}$	$\overrightarrow{PB} = \binom{10-x}{12}$
	$\left\|\overrightarrow{PA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PB}\right\|^2$ $(-x)^2 + 6^2 = (10-x)^2 + 12^2$	

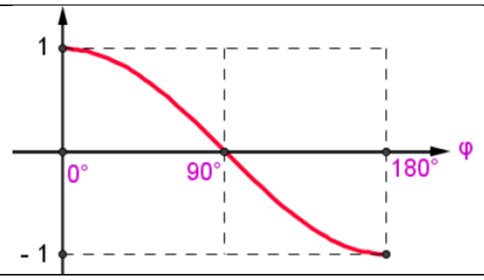


8 Multiplikation von zwei Vektoren (Skalarprodukt)

$\vec{a} * \vec{b} = \|\vec{a}\| * \|\vec{b}\| * \cos\varphi$		Projektion von B-Vektor auf A-Vektor mit Hilfe des $\cos\varphi$ Division von Vektoren ist nicht definiert!

Zwischenwinkel

positiv	$\vec{a} * \vec{b} > 0$	$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$
Null	$\vec{a} * \vec{b} = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
negativ	$\vec{a} * \vec{b} < 0$	$\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$



Rechengesetze

Kommutativgesetz	$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$		gilt
Distributivgesetz	$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$		gilt
Assoziativgesetz	$(\vec{a} * \vec{b}) * \vec{c} \neq \vec{a} * (\vec{b} * \vec{c})$		gilt nicht
Potenzgesetze	$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$	$\vec{a} * \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$	

Das Skalarprodukt ist dann Null, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist, oder wenn die Vektoren normal (rechtwinklig) zueinander stehen.

Komponentendarstellung

$\vec{a} * \vec{b} = \binom{a_1}{a_2} * \binom{b_1}{b_2} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2$	Das Skalarprodukt zweier Spaltenvektoren ist die Summe der Produkte entsprechender Komponenten.

9 Vektoren im Raum

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$	$\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_z}^2 + {a_z}^2}$

$$\vec{a} = a_x * e_x + a_y * e_y + a_z * e_z$$