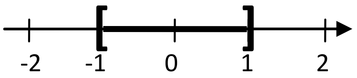
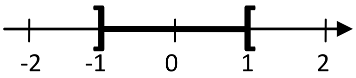
DIFFERENTIALRECHNUNG

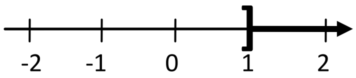
Polynome

Intervalle

$[-1;1]$	$-1 \leq x \leq 1$	$]-1;1[$	$-1 < x < 1$	$]1;\infty[$	$1 < x < \infty$







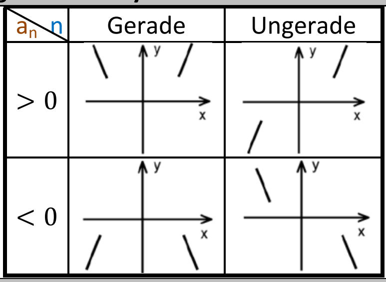
Polynom-Division

$$\begin{aligned}
&(x^2+2x+1)/(x+1) = x+1\\
&\underline{x^2+\ \ x}\\
&\qquad x+1\\
&\qquad \underline{x+1}\\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

$$y(x) = (x+1)(x+1)$$

$$\begin{aligned}
&(x^4-x^3+x^2-x+a)/(x-2) = x^3+x^2+3x+5\\
&\underline{x^4-2x^3}\\
&\quad x^3+x^2-x+a\\
&\quad \underline{x^3-2x^2}\\
&\qquad 3x^2-x+a\\
&\qquad \underline{3x^2-6x}\\
&\qquad\quad 5x+a\\
&\qquad\quad \underline{5x-10}\\
&\qquad\qquad a+10=0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{a=-10}}
\end{aligned}$$

Allgemeine Polynom-Form



allgemeine Polynom

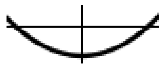
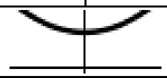
$$y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Linearfaktor-Ansatz

$$y = a(x-x_1)^z(x-x_2)$$

Quadratische Funktion

Normalform	$y = ax^2+bx+c$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$			→ Diskriminante
Scheitelform	$y = a(x-c)^2+d$	Scheitelpunkt $S(c\|d)$			
Linearfaktor	$y = a(x-x_1)(x-x_2)$	Linearfaktoren $x_i = x_1, x_2$			
Diskriminante	$D = b^2-4ac$	> 0		$x_1 \neq x_2$	$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
		$= 0$		$x_1 = x_2$	$x_i = -\frac{b}{2a}$
		< 0		$x_1, x_2 \in \mathbb{C}$	$x_i = -\frac{b}{2a} \pm j\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

Exponentialfunktion

$$y = a * q^{b*x+c} + d$$
$$y = A * B^x$$
$$y = A * e^{\lambda * x}$$

a, A	Anfangswert	
b, λ	Zeit bis Vervielfachung ($-\lambda = Abnahme$)	
q, B, e	Wachstumsfaktor $\left(1+\frac{p\,(\text{Zins})}{100}\right)$	$> 1 = Zunahme$ $< 1 = Abnahme$
c	Zeit auf null setzen	
d	Nicht vervielfachender Wert	

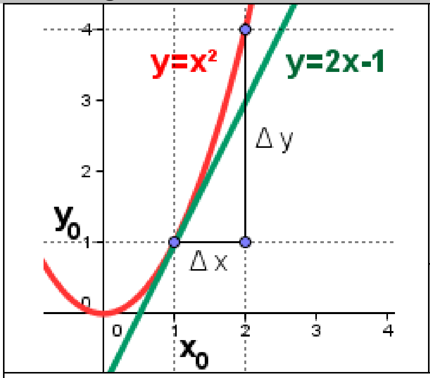
Trigonometrische Funktionen

$$y = a * sin(bx+c) + d$$
$$y = a * cos(bx+c) + d$$
$$y = a * tan(bx+c) + d$$

a = Amplitude
b = Kreisfrequenz
c = Phasenverschiebung
Periodendauer $= \frac{2\pi}{b}$

Differentialrechnung

Änderungsrate



Δx	x $(x_0 + \Delta x)$	y	Δy	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	2	4	3	3
0.1	1.1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1.0201	0.0201	2.01
…	…	…	…	…
0			0	2

Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y) = 0$$
$$\lim_{x \to 2} (x^2) = 4$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \cong 2$$

Mathematische Schreibweise:

$$\lim(\Delta x) = x_0$$

was passiert, wenn Δx unendliche nahe an Wert x_0 geht.

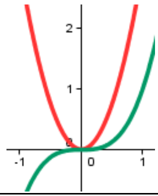
Differenzenquotient

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenzialquotient

$$\frac{df}{dx} = \left.\frac{dy}{dx}\right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ableitung



$$y = f(x) = x^3$$
$\rightarrow$ *Funktionswert bei x*
$$y = f'(x) = 3x^2 \; (Ableitung)$$
$\rightarrow$ *Steigung bei x*

Beispiel $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x_0$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 \, \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x|_{(\Delta x \to 0)} = 2x_0$$

Definition und Begriffe

Die Funktion $f(x)$ heisst an der Stelle von x_0 „differenzierbar“ (=ableitbar), wenn überall der Limes existiert.

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	nicht differenzierbar bei
$f(x) = x^3$ $f(x) = x^2$ $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 - 1; x \geq 0 \\ -1; x < 0 \end{Bmatrix}$	$f(x) = \lvert x \rvert$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \begin{Bmatrix} -1; x > 0 \\ 2x; x < 0 \end{Bmatrix}$	- Hohlstellen - Knicken - Sprungstellen

Schreibweisen

$y' = f' = (x^3)' = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2$	$\dot{s}(t) \rightarrow s'(t)$ $\ddot{s} \rightarrow s'(s'(t))$

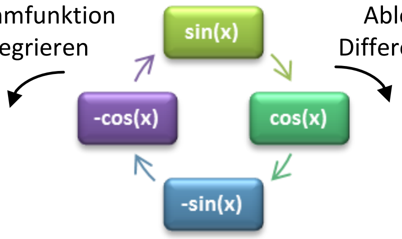
Ableitungsregeln

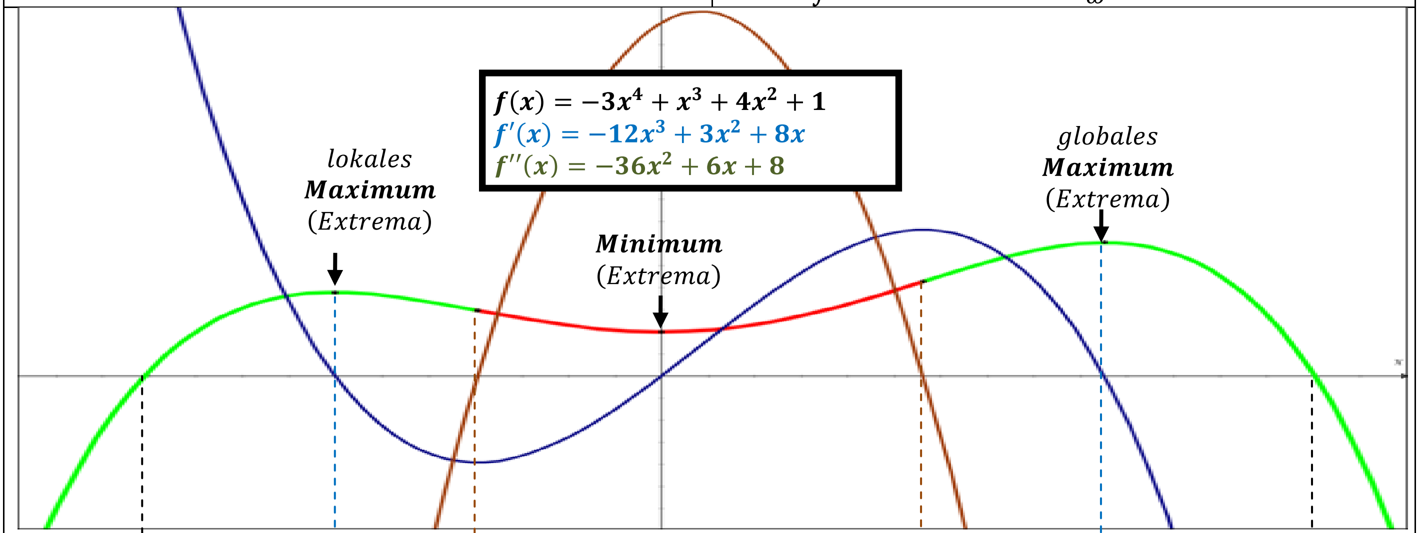
$$(a * x^n)' = n * a * x^{n-1}$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
$$(c * f)' = c * f'$$

Tangente, Normale

Tangente	$m = f'(x_0)$	$y(x) = f'(x_0) * x + f(x_0) - f'(x_0) * x_0$ $y(x) = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$ $x_0 = Tangentenberührungspunkt$
Normale	$m = -\frac{1}{f'(x_0)}$	$y(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} * x + \frac{x_0}{f'(x_0)} + f(x_0)$ $y(x) = -\frac{(x - x_0)}{f'(x_0)} + f(x_0)$ $x_0 = Normalenschnittpunkt$

Erste und Zweite Ableitung

Differenzieren		Integrieren
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ $\frac{d}{dx}\ldots = \ldots$	Stammfunktion Integrieren  Ableitung Differenzieren	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ $\int \ldots dx = \ldots + C$
$[A * \sin(\omega t + \varphi)]' = A\omega * \cos(\omega t + \varphi)$ $[A * \cos(\omega t + \varphi)]' = -A\omega * \sin(\omega t + \varphi)$		$\int A * \sin(\omega t + \varphi)\,dt = -\frac{A}{\omega} * \cos(\omega t + \varphi) + C$ $\int A * \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{A}{\omega} * \sin(\omega t + \varphi) + C$



Wendepunkte
$f''(x) = 0$

Extrema
$f'(x) = 0$

Nullstellen
$f(x) = 0$

Rechtskrümmung = konkav $f''(x) < 0$	Linkskrümmung = konvex $f''(x) > 0$	Rechtskrümmung = konkav $f''(x) < 0$

Zusammenhang 1te und 2te Ableitung

		$f'(x)$ < 0	$f'(x)$ = 0	$f'(x)$ > 0
$f''(x)$	< 0		max	
	$= 0$	Wendepunkt	höherer Ordnung	Wendepunkt
	> 0		min	

Anzahl Nullstellen, Extrema und Wendepunkte

Polynome n-ten Grades	
Nullstellen	$[0; n]$
Extrema	$[0; n-1]$
Wendepunkte	$[0; n-2]$

Extrema und Sattelpunkte höherer Ordnung

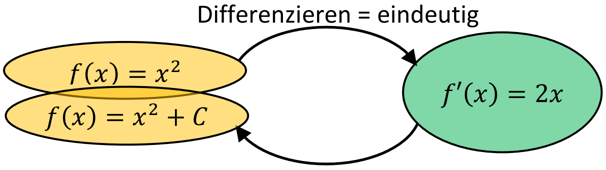
$y^n(x) \neq 0$	n = gerade	$y^n(x) < 0$	Maximum
		$y^n(x) > 0$	Minimum
	n = ungerade	$y^n(x) < 0$	Sattelpunkt
		$y^n(x) > 0$	Sattelpunkt

Beispiel

$y(x) = x^4$	$y(0) = 0$
$y'(x) = 4x^3$	$y'(0) = 0$
$y''(x) = 12x^2$	$y''(0) = 0$
$y'''(x) = 24x$	$y'''(0) = 0$
$y^{IV}(x) = 24$	$y^{IV}(0) = 24$

Integralrechnung

Differenzieren = eindeutig



Integrieren = nicht eindeutig, da +C

Unbestimmtes Integral (=Funktion)

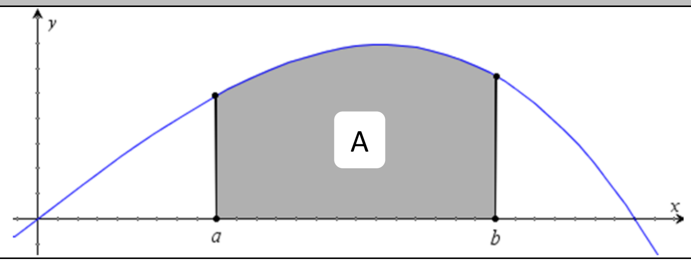
Schreibweise	Eindeutigkeit der Umkehrfunktion	Ableitungsregel
$\int (2x)dx = x^2 + C$	$\int f(x)dx = F(x) + C$ C = Integrationskonstante	$f(x) = x^n$ $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{n+1} * x^{n+1} + C$
Operator: $f' = \frac{d}{dx}[f]$	Stammfunktion: $F'(x) = f(x)$	

Bestimmtes Integral (=Fläche)

Schreibweise

$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$

b = obere Integrationsgrenze
a = untere Integrationsgrenze



Integral: Fläche unter X-Achse ist negativ	$A = \int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$
Flächenberechnung: Fläche unter X-Achse ist positiv	$A = \int_1^2 (-x^2 + 3)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_1^2 = \left(-\frac{8}{3} + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3\right)$

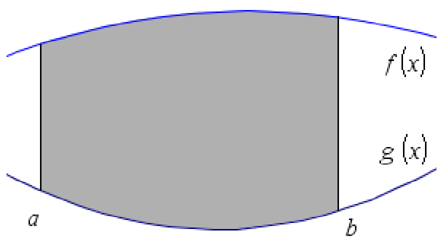
Integrationsregeln

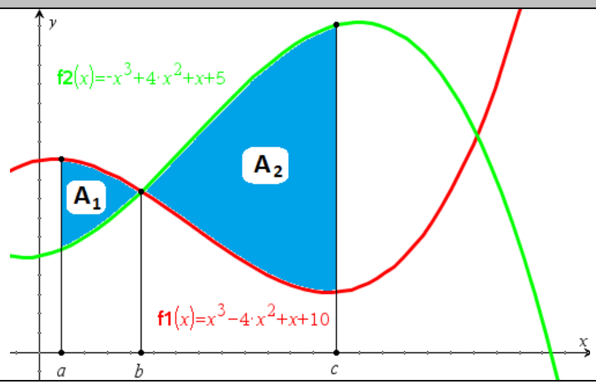
Faktorenregeln	Vertauschungsregel	Integral von a nach a
$\int_a^b \lambda * f(x)\,dx = \lambda * \int_a^b f(x)\,dx$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^a f(x)dx = 0$

Summenregel	Zerlegung
$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Flächenberechnung (=positive Fläche)

Integral der **oberen** f(x) **minus** Integral der **unteren** g(x)



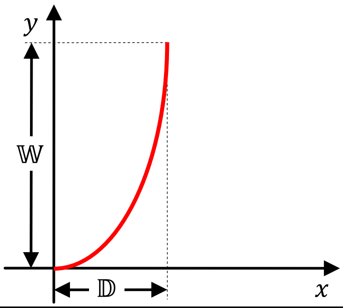
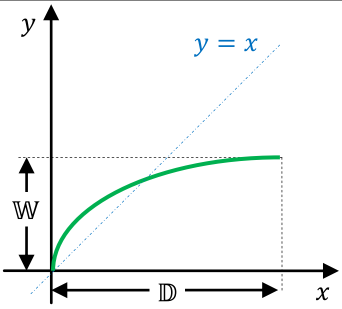


$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \left[F_{oben}(x) - F_{unten}(x)\right]_a^b$$

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b (f1 - f2)dx + \int_b^c (f2 - f1)dx$$

Funktionen

Umkehrfunktion (=Inverse) $f^{-1}(x)$

Funktion $f: y = f(x)$	$x \to y$	Funktion oben minus eins $f^{-1}: x = f^{-1}(y)$	$y \to x$
	$f: y(x) = x^2$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le 4\}$		$f^{-1}: y(x) = \sqrt{x}$ $\mathbb{D} = \{y \mid 0 \le y \le 4\}$ $\mathbb{W} = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$
invertierbar, umkehrbar: wenn $f'(x)$ existiert.		geometrisch gesehen eine Spiegelung an $y = x$	

$f(x) = \sin \alpha$		$f^{-1}(x) = \arcsin \alpha$
$f(x) = \cos \alpha$		$f^{-1}(x) = \arccos \alpha$
$f(x) = \tan \alpha$	$\frac{1}{f(x)} = \operatorname{cotan} \alpha$	$f^{-1}(x) = \arctan \alpha$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$[c * f(x)]' = c * f(x)'$
Summenregel	$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$
Produktregel	$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$\left[f_a\left(f_i(x)\right)\right]' = f_a'\left(f_i(x)\right) * f_i'(x)$

Ersetzungen

$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}$	$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$