

KLASSISCHE MECHANIK

Das Einheitensystem

Physikalische Grössen

$G = \{G\} * [G]$ <i>Grösse = Zahlenwert * Einheit</i>	Skalare	Masszahl und Einheit	Zeit, Masse, Volumen
	Vektoren	Masszahl, Einheit und Richtung	Weg, Kraft, Geschwindigkeit

Die Basiseinheiten

	Symbol	Einheit	Zeichen	10 ¹⁸	Trillion	Exa	E	10 ⁻¹⁸	Atto	a
Länge	l	Meter	m	10 ¹⁵	Billiarde	Peta	P	10 ⁻¹⁵	Femto	f
Masse	m	Kilogramm	kg	10 ¹²	Billion	Tera	T	10 ⁻¹²	Piko	p
Zeit	t	Sekunden	s	10 ⁹	Milliarde	Giga	G	10 ⁻⁹	Nano	n
elektr. Stromstärke	I	Ampere	A	10 ⁶	Million	Mega	M	10 ⁻⁶	Mikro	μ
Temperatur	T	Kelvin	K	10 ³	Tausend	Kilo	k	10 ⁻³	Mili	m
Lichtstärke	I _v , I	Candela	cd	10 ²	Hundert	Hekto	h	10 ⁻²	Zenti	c
Stoffmenge	n	Mol	mol	10 ¹	Zehn	Deka	da	10 ⁻¹	Dezi	d

Die Newton'schen Prinzipien

Trägheitsprinzip (1. Newton)

Ein Körper möchte seine Geschwindigkeit (Zustand) beibehalten. $\vec{F} = \vec{0} \rightarrow \vec{v} \text{ konstant}$

Aktionsprinzip (2. Newton) $m = \text{konstant}$

Die Beschleunigung ist proportional zur Kraft. $\vec{F} \neq \vec{0} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

$\vec{F} = m * \vec{a}$ $[\vec{F}] = [m] * [\vec{a}] = kg * \frac{m}{s^2} = N$

Kräfte und ihr Wirkung

Die Gewichtskraft

$\vec{G} = m * \vec{g}$	\vec{G}	Gewichtskraft	<table border="1"> <tr> <td>Masse</td> <td>Körpereigenschaft</td> <td>ortsunabhängig</td> <td>$[m] = kg$</td> </tr> <tr> <td>Gewicht</td> <td>Kraft</td> <td>ortsabhängig</td> <td>$[G] = N$</td> </tr> </table>	Masse	Körpereigenschaft	ortsunabhängig	$[m] = kg$	Gewicht	Kraft	ortsabhängig	$[G] = N$
	Masse	Körpereigenschaft		ortsunabhängig	$[m] = kg$						
Gewicht	Kraft	ortsabhängig	$[G] = N$								
	\vec{g}	Fallbeschleunigung									

Kraft und Deformation

$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$		$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0}$	F'	Gegenkraft
			$\vec{F} \text{ und } \vec{F}'$	Kräftepaar (Deformation möglich)

Die Federkraft

$\vec{F}_{Feder} = -D * \vec{x}$ $F_{Feder} = D * x$	\vec{F}_{Feder}	Gewichtskraft	
	D	Federkonstante	
	\vec{x}	Strecke	

Reaktionsprinzip (3. Newton)

Kräfte treten stets paarweise auf (greifen an verschiedenen Körpern an): Actio = (minus) Reactio

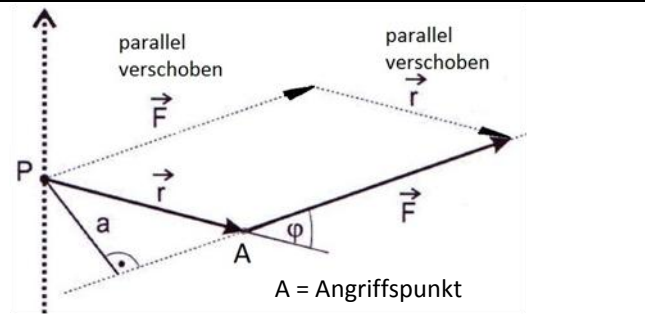
Das Aktionsprinzip bei mehreren verbundenen Körpern

Atwood'sche Fallmaschine

	$\vec{R}_1 = \vec{S}_1 + \vec{G}_1 = m_1 * \vec{a}_1$	$\vec{R}_2 = \vec{S}_2 + \vec{G}_2 = m_2 * \vec{a}_2$	
	$R_1 = S_1 - G_1 = m_1 * a_1$	$R_2 = G_2 - S_2 = m_2 * a_2$	
	Reaktionsprinzip $\rightarrow S_1 = S_2 = S \quad a_1 = a_2 = a$		
	$S - m_1 * g = m_1 * a_1$ $-S + m_2 * g = m_2 * a_1$		
	$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) * g$	$S = \frac{2 * m_1 m_2}{m_2 + m_1}$	$S = m_1(a + g)$
			Plausibilitätsprüfung
1. $m_1 = m_2 \quad a = 0 \quad S = m * g$			
2. $m_1 \rightarrow 0 \quad a \rightarrow g \quad S \rightarrow 0$			

Statisches Gleichgewicht

Das Drehmoment



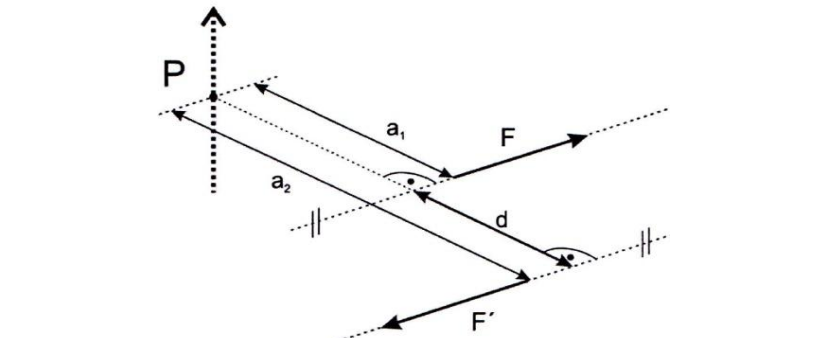
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
 $(\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y})$

$M = r * F * \sin(\varphi)$

$\vec{M} = \text{Drehmoment}$
 $\vec{r} = \text{Vektor}$
 $\vec{F} = \text{Kraft}$
 $\varphi = \text{Zwischenwinkel}$

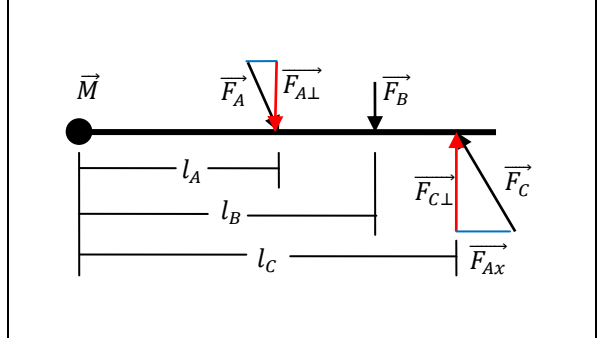
- Der Betrag von \vec{M} entspricht der Fläche des von \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Parallelogramms.
- M ist positiv, wenn es eine Drehung in Gegenuhzeigersinn erzeugt. $M = \pm F * a$

Das Drehmoment eines Kräftepaars



Gleicher Betrag, entgegengesetzte Richtung: $F = |\vec{F}| = |\vec{F}'|$
 Liegen die Wirkungslinien übereinander, heben sie sich auf.
 Ansonsten wird ein Drehmoment erzeugt:
 $M_{\text{tot}} = -F' * a_2 + F * a_1$ $M = F * d$

Hebelarm



$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{A\perp} * l_A + \vec{F}_B * l_B = \vec{F}_{C\perp} * l_C$$

Das Gleichgewicht

Gleichgewichtsbedingungen

keine Translation	keine Rotation
$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$	$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$

Der Schwerpunkt

Gleichgewichtsarten	Schwerpunkt:
Indifferentes Gleichgewicht	auf Drehpunkt
Stabiles Gleichgewicht	senkrecht unter dem Drehpunkt
Labiles Gleichgewicht	senkrecht über dem Drehpunkt

Vorgehen beim Lösen von Gleichgewichtsaufgaben

1. Skizze zeichnen und „gegeben“ und „gesucht“ auflisten
2. Körper freimachen (=Kräfte einzeichnen)
3. Koordinatensystem und Komponenten einzeichnen
4. Gleichgewichtsbedingungen formulieren und Größen ausrechnen
5. Ergebnis interpretieren und Plausibilität prüfen

Geradlinige Bewegung (Bewegung in einer Dimension)

$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$	$\Delta \vec{s}$	Verschiebung	$[\Delta \vec{s}] = m$	$s(t) = s_0 + v_0 * t + \frac{a * t^2}{2}$	Fläche unter v
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	\vec{v}	Geschwindigkeit	$[\vec{v}] = \frac{m}{s}$	$v(t) = v_0 + a * t = \dot{s}(t)$	Steigung von s
	\vec{a}	Beschleunigung	$[\vec{a}] = \frac{m}{s^2}$	$a(t) = a = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$	Steigung von v Änderungsrate von s
$= \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$	Δt	Zeitintervall	$[\Delta \vec{t}] = s$		

Diagramme

Geradlinig gleichförmig	Geradlinig gleichförmig beschleunigt	
$\vec{s} = \vec{v} * t$ $\vec{v} = \text{konstant} = v_0 + \vec{a} * t$ $\vec{a} = \vec{0}$	$\vec{s} = \frac{\vec{v} * t}{2} = \frac{\vec{a} * t^2}{2}$ $\vec{v} = \vec{a} * t$ $\vec{a} = \text{konstant}$	$\vec{s} = \vec{v}_0 * t + \frac{\Delta \vec{v} * t}{2} = \vec{v}_0 * t + \frac{\vec{a} * t^2}{2}$ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} * t$ $\vec{a} = \text{konstant}$

Krummlinige Bewegung (Bewegung in zwei/drei Dimensionen)

Ortsvektor

	Ein Ortsvektor zeigt vom Nullpunkt zum Ort, wo sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t befindet.	
	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ $= \text{tangential zu } y(x)$	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$ $= \text{nicht tangential zu } y(x)$
Jede krummlinige Bewegung ist eine beschleunigte Bewegung!		

Der schräge Wurf

Der horizontale Abwurf

	x-Richtung	y-Richtung	Summe
	$a_x = 0$	$a_y = g = \text{konst.}$	$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$
	$v_x = v_0 = \text{konst.}$	$v_y = g * t$	$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ g * t \end{pmatrix}$
	$x = v_0 * t$	$y = \frac{g * t^2}{2}$	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 * t \\ \frac{g * t^2}{2} \end{pmatrix}$

Der schräge Abwurf

	x-Richtung	y-Richtung	Summe
	$a_x = 0$	$a_y = -g = \text{konst.}$	$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$
	$v_x = v_0 \cos(\alpha_0) = \text{konst.}$	$v_y = v_0 \sin(\alpha_0) - g * t$	$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha_0) \\ v_0 \sin(\alpha_0) - g * t \end{pmatrix}$
	$x = v_0 \cos(\alpha_0) * t$	$y = v_0 \sin(\alpha_0) * t - \frac{g * t^2}{2}$	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha_0) * t \\ v_0 \sin(\alpha_0) * t - \frac{g * t^2}{2} \end{pmatrix}$

Kreisbewegung

	$s = r * \varphi$	\vec{r}	Radius	m	$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}$
		s	Bogenlänge	m	$s(t) = r * \varphi(t)$
		φ	Winkel	[rad] Bogenmass	$\varphi(^{\circ}) = \frac{180^{\circ}}{\pi} \varphi(\text{rad})$
	$v = r * \omega$ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
		v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$
	$a = r * \alpha$ $\alpha = r * \omega^2$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	α	Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	$\alpha = \frac{d\varphi}{dt}$
a		Beschleunigung	$[a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$	
$F_{zp} = m * \omega^2 * r$	F_{zp}	Zentripetalkraft	$[F_{zp}] = \text{N}$	$F_{zp} \uparrow \downarrow \vec{r}$	

Zusammengesetzte Bewegung

	$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$
	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 * t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R * \cos \omega t \\ R * \sin \omega t \end{pmatrix}$

Anwendung der Newton'schen Prinzipien auf krummlinige Bewegungen

Reibkräfte

	$F_{R,voll} = \mu_0 * F_N$	F_R	Haftreibung
	$\mu_{roll} < \mu < \mu_0$	μ_0	Haftreibungskoeffizient
	$F_R = \mu * F_N$	F_R	Gleitreibung
		μ	Gleitreibungskoeffizient
	$F_R = \mu_{roll} * F_N$	F_R	Rollreibung
		μ_{roll}	Rollreibungskoeffizient
	$F_R = \mu_0 * G * \cos \omega$	ω	Zwischenwinkel
	$\mu_0 = \tan(\omega_{grenz})$	ω_{grenz}	Grenzwinkel

Scheinkräfte in beschleunigten Bezugssystem

Trägheitskraft	z.B. Bremsendes Tram $\vec{F}_{Trägheit} = -m * \vec{a}_{Bezugssystem}$	
Inertialsystem: Bezugssystem, das sich gleichförmig bewegt, wenn keine äussere Kräfte auf ihn einwirken.		
Zentripetalkraft	$\vec{a}_{zp} = -\omega^2 \vec{r}$	$F_{zp} = mr\omega^2 = \frac{m * v^2}{r}$
Zentrifugalkraft	$\vec{F}_{Zentrifugalkraft} = -\vec{F}_{Zentripetalkraft}$	
Corioliskraft	$\vec{F}_C = 2m(\vec{v}_0 \times \vec{\omega})$	

Arbeit, Energie und die Energieerhaltung

Die Arbeit (F konstant)

	$W = \vec{F} * \vec{s}$ $W = F * s * \cos \varphi$	W	Arbeit	$[W] = Nm = J = \frac{kg * m^2}{s^2}$
		F	Kraft	$[F] = N$
		s	Weg	$[s] = m$
		φ	Zwischenwinkel	$[\varphi] = \{ \}$

Verschiedene Formen der Arbeit

Hubarbeit

$W_{pot} = m * g * h$	m	Masse	$[m] = kg$
	F	Kraft	$[F] = N$
	g	Erdbeschleunigung	$[g] = \frac{m}{s^2}$

Federspannarbeit (F ≠ konstant)

	F(s)	Federspannkraft	$[F(s)] = N$
	D	Federkonstante	$[D] = \frac{N}{mm^2}$
	s	Weg	$[s] = mm$

Beschleunigungsarbeit (a = konstant)

	$W_{kin} = \frac{m * v^2}{2}$	m	Masse	$[m] = kg$
		v	Geschwindigkeit	$[v] = \frac{m}{s}$

Leistung

$P = \frac{W}{t} = \frac{F * s}{t} = F * v$	P	Leistung	$[P] = W$
	W	Arbeit	$[W] = J = Ws$

Verschiedene Formen der Energie (=Gespeicherte Arbeit)

Die Energie ist ein Mass für die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.

Potentielle Energie	$W_{pot} = m * g * h = \text{gespeicherte Hubarbeit}$
Federenergie	$W_{Feder} = \frac{D * s^2}{2} = \text{gespeicherte Federspannarbeit}$
Kinetische Energie	$W_{kin} = \frac{m * v^2}{2} = \text{gespeicherte Beschleunigungsarbeit}$

Energieerhaltungssatz

Energie lässt sich weder vernichten noch aus dem Nichts erzeugen. Energie kann nur umgewandelt werden.

$$W_{tot}(1) = W_{tot}(2)$$

Impuls, Impulserhaltung, Stossprozesse

Impuls

	$\vec{p} = m * \vec{v}$	p	Impuls	$[p] = \frac{m * kg}{s}$
--	-------------------------	-----	--------	--------------------------

Impulserhaltungssatz

In einem kräftemässig abgeschlossenen System bleibt die Summe der Impulse konstant.

$$p_{tot}(1) = p'_{tot}(2)$$

Abgeschlossenes System:

kräftemässig und energiemässig
Impulserhaltungssatz Energieerhaltungssatz

Der zentrale vollkommen inelastische (weiche) Stoss (=dauerhafte Verformung)

	$p_1 + p_2 = p'$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$	Impulssatz
	$W_{kin1} + W_{kin2} = W'_{kin} + \Delta W$ $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2} + \Delta W$	Energiesatz
$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$		
$\Delta W = \frac{m_1 * m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$		

Der zentrale elastische (harte) Stoss mit einem Partner in Ruhe ($v_2 = 0$)

	$p_1 = p'$ $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$	Impulssatz
	$W_{kin1} = W'_{kin1} + W'_{kin2}$ $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$	Energiesatz
$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} * v_1$		
$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} * v_1$		

Der zentrale elastische (harte) Stoss mit einem Partner in Bewegung ($v_2 \neq 0$)

	$p_1 + p_2 = p'$ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$	Impulssatz
	$W_{kin1} + W_{kin2} = W'_{kin1} + W'_{kin2}$ $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$	Energiesatz
$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} * v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} * v_2$		
$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} * v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} * v_2$		

Allgemeine Form des Newton'schen Aktionsprinzips

allgemeine Form	integrale Form = Kraftstoss
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta \vec{p}$ $W_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{F_0^2 (\Delta t)^2}{2m}$

Drehbewegung von Massenpunkten und starren Körpern

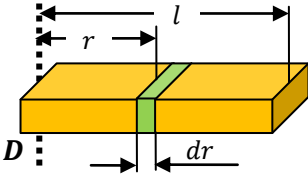
Elementare Zusammenhänge bei Drehbewegungen

$\vec{\varphi}$	Winkel	$[\vec{\varphi}] = rad$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 * t + \frac{\alpha * t^2}{2}$	Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit	$[\vec{\omega}] = \frac{rad}{s}$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha * t = \dot{\varphi}(t)$	
$\vec{\alpha}$	Winkelbeschleunigung	$[\vec{\alpha}] = \frac{rad}{s^2}$	$\alpha(t) = \alpha = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$	

Newton's Aktionsprinzip für Drehbewegungen

$J = mr^2$	$J = \int_m r^2 * dm$	Massenträgheitsmoment einer Punktmassen	$[J] = kg * m^2$
$\vec{M} = J * \vec{\alpha}$	$M = \int_m r^2 dm * \vec{\alpha}$	Newton's Aktionsprinzip für Drehbewegungen	$[M] = Nm^2$

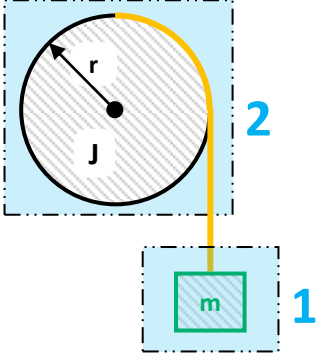

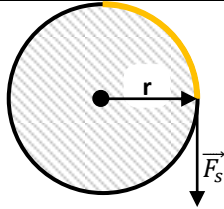
Trägheitsmomente



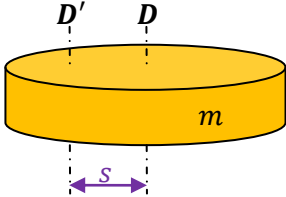
$$J = \int_{Masse} r^2 dm = \int_{Volumen} r^2 \rho dV = \int_0^l r^2 \rho A dr = \frac{\rho A}{3} [r^3]_0^l = \frac{\rho A}{3} l^3$$

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

Beispiel

	System 1 linear Translation		$\sum_i \vec{F}_i = m * \vec{a}$ $G - F_s = m * a$ $m * g - F_s = m * a$
	System 2 drehend Rotation		$\sum_i \vec{M}_i = J * \vec{\alpha}$ $F_s * r = J * \alpha$ $F_s * r = J * \frac{a}{r}$

Satz von Steiner



$$J' = J_s + ms^2$$

$$D \parallel D'$$

Kombinationssatz

Besteht ein Körper aus mehreren Teilkörpern, ist das Massenträgheitsmoment die Summe einzelnen Trägheitsmomente.

Drehachsen

∞	Drehachsen	beliebig
∞	Schwerpunktachsen	Achsen durch den Schwerpunkt
3	Hauptträgheitsachsen	Achsen, bei der der Körper ausgewuchtet ist
2	freie Achsen	minimales und maximales Trägheitsmoment der Hauptträgheitsachse

Arbeit, Energie, Leistung bei Drehbewegungen

$W = \vec{M} * \vec{\varphi}$	$W_{rot} = \frac{J}{2} \omega^2$	$P = M * \omega$
-------------------------------	----------------------------------	------------------

Rotation und Translation

	gelagert	frei
		mit 2 Ergänzungsgrößen (Dynamie) von F ergänzen
Rotation	Körper beginnt zu drehen: $M = r * F$	Körper beginnt zu drehen: $M = d * F$
Translation	keine: $\vec{F} = \vec{F}'$	F'' in Schwerpunkt \vec{F}''

Rollbedingungen bei ebener Unterlage

	$x_{sp} = b$
	$x_{sp} = r * \varphi$
	$v_{sp} = r * \omega$
	$a_{sp} = r * \alpha$

Rollen	<->	Gleiten
		Vollzylinder
F_R	<	$F_{R,voll}$
$\frac{1}{3} m * g * \sin \varphi$	<	$\mu_0 * m * g * \cos \varphi$
$\tan \varphi$	<	$3\mu_0$

Zylinder auf schiefer Ebene

	ohne Reibung	mit Reibung
Translation	\vec{F}	\vec{F} und \vec{F}_R'
Rotation	keine, (reines Gleiten)	\vec{F}_R und \vec{F}_R''
Formeln	$\sum F = \vec{F} = \vec{G} + \vec{A} = m * \vec{a}$	$\sum M = r * F_R = J * \alpha$ $\sum F = F - F_R = m * a$
	$a = g * \sin \varphi$	$a = r * \alpha$

Maxwell'sches Rad

\vec{G} und \vec{F}''
\vec{F}_S und \vec{F}'
$\sum F = \vec{G} - \vec{F}_S = m * a$ $\sum M = F_S * r = J * \alpha$ $J = \frac{1}{2} m * r^2$
$a = \frac{2}{3} g$

Drehimpuls, Drehimpulserhaltung und Kreisel

Drehimpuls

	für Punktmassen	allgemeine Definition	Einheit
	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$	$\vec{L} = J * \vec{\omega}$	$[\vec{L}] = \frac{kg * m^2}{s}$

Drehimpulserhaltungssatz

$\sum_i \vec{L}_i = \text{konst.}$	$L(r_1) = L(r_2)$	gilt in abgeschlossenen Systemen
------------------------------------	-------------------	----------------------------------

Aktionsprinzip für die Drehung

differentieller Form	integraler Form
$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta \vec{L}$