

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN (DGL)

Definition und Klassifikation und Beispiele

Definition und Klassifikation

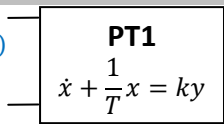
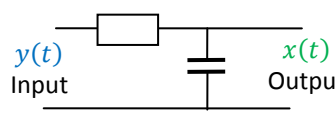
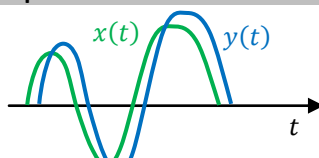
Definition Gleichung, deren Unbekannte eine Funktion ist und die Ableitungen der gesuchten Funktion enthält. Anmerkung $y'(t) = y' = \dot{y} = \dot{y}(t)$	Lösungen	
	allgemeine Lösung	spezielle Lösung
	Angabe der vollständigen Lösungsschar inkl. Integrationskonstanten Ordnung = Anz. Integrationskonstanten $y(t) = A * \sin(t - \varphi)$	Anfangsbedingungen AB: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$ $y(t) = \sin t$

Klassifikation

$y(\dots)$:	$y^{(n)} + \dots + h(x)y' + g(x)y = f(x)$		
gewöhnliche DGL: $y(x)$ Eine Variable (ODE)	n-ter Ordnung höchste Ableitung	mit konstanten Koeffizienten $g(x) \wedge h(x) = C \in \mathbb{R}$	homogen $f(x) = 0$
partielle DGL: $y(x_1, x_2)$ mehrere Variablen (PDE)			inhomogen $f(x) \neq 0$
		separierbar $y' * g(y) = f(x)$	

PT1 - Glied

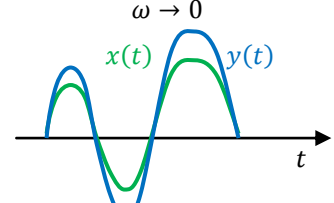
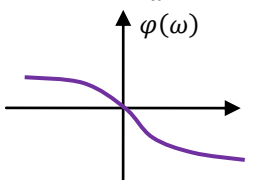
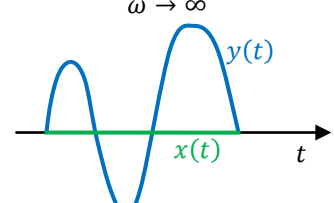
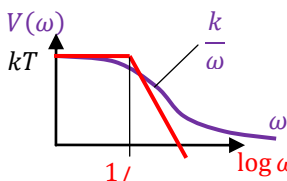
- „Dämpfer“
- „Zeitverzögerung“ -> Tiefpass

Modell	Modellierung	Tiefpass
$y(t)$ IN 		

Aufsuchen einer partikulären Lösung

$x(t) = x_{\text{hom}}(x) + x_p$ $x(t) = C * e^{-\frac{t}{T}} + a \sin \omega t + b \cos \omega t$ $y(t) = A * \sin \omega t$	Einschwingvorgang $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{hom}} = 0$ stationäre Lösung x_p	x_p in DGL einsetzen $\begin{cases} -b\omega + \frac{a}{T} = kA \\ a\omega + \frac{b}{T} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{kAT}{\omega^2 T^2 + 1} \\ b = -\frac{kA\omega T^2}{\omega^2 T^2 + 1} \end{cases}$
---	---	---

Lösung

Grenzwerte für ω	Verstärkung $V(\omega)$	Phasenverschiebung φ
$\omega \rightarrow 0$ 	$V(\omega) = \frac{D(\omega)}{A} = \frac{k * T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ $\omega \rightarrow 0$ $V(\omega) = k * T$ $\omega \gg T$ $V(\omega) = \frac{k}{\omega} - \frac{k}{2\omega^3 T^2}$	$\tan \varphi = \frac{b}{a} = -\omega T$ 
$\omega \rightarrow \infty$ 		Amplitude D
		$D = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{k * A * T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$

Lineare DGL 1.ter Ordnung

Lineare DGL 1ter Ordnung

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

$g(x)$: Störfunktion

homogen $g(x) = 0$

Separation der Variablen

1. Separation der Variable
 $y(x) = C * e^{-\int f(x)dx}$
2. Test

Variation der Konstanten

1. Lösung der homogenen DGL $y_{hom}(x) = C * e^{-\int f(x)dx}$
2. Ansatz mit Variation der Konstanten
 $y_{inh}(x) = y_{hom}(x)$ mit $C(x)$
 $y'_{inh}(x)$ berechnen
in DGL einsetzen + kürzen
3. Lösung der DGL für $C(x)$ $C(x)$ berechnen, Int. Konst. B
4. Lösung der inhomogenen DGL $C(x)$ in Ansatz einsetzen

inhomogen $g(x) \neq 0$

mit konstanten Koeffizienten $f(x) = a_0$

Aufsuchen einer partikulären Lösung

1. Lösung der homogenen DGL $y_{hom}(x) = C * e^{-\int f(x)dx}$
2. Ansatz mit $g(x)$ für y_p $y_p(x) = (Tab. S. 272)$
 $(g = g_1 + g_2)$ $y'_p(x) = \dots$
3. y_p in DGL einsetzen $\rightarrow c_0, c_1, \dots$ $y'_p(x) + a_0 y_p(x) = g(x)$
4. Alles einsetzen $y_{inh}(x) = y_{hom}(x) + y_p$

$g(x)$	y_p
konstant	c_0
Polynom	$c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$
$\sin x, \cos x$ $\sin x + \cos x$	$c_1 * \sin(x) + c_2 * \cos(x)$
$A * e^{bx}$	$b \neq -a_0 \rightarrow c_0 * e^{bx}$
	$b = -a_0 \rightarrow c_0 x * e^{bx}$

Elementare DGL's

$$y^{(n)}(x) = g(x)$$

Separierbare DGL's

$$y'(x) * f(y) = g(x)$$

DGL mit Richtungsfeld

$$y'(x) = g(x, y)$$

Elementare Integration

1. n*Integrieren $\int \dots dx$

1. y und x separieren
2. * dx
3. Integration
4. Nach y auflösen

Lösung mit Richtungsfeld

1. aufzeichnen
 2. schätzen
- field:= field()

Elektrotechnik		Mechanik		Mischvorgänge										
R	$u(t) = R * i(t) = R * \dot{q}$	Bewegungen $v(t) = \dot{s}(t)$ $v(t) = a * t$ $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ $a(t) = \frac{1}{2} a * t^2$	Kräfte <table border="1"> <tr> <td>Schwerkraft</td> <td>$\vec{F}_G = m * \vec{g}$</td> </tr> <tr> <td>Coulomb'sche Reibung</td> <td>$\vec{F}_R = \mu * \vec{F}_N$</td> </tr> <tr> <td>Stoke'sche Reibung</td> <td>$\vec{F}_R = -\vartheta * \vec{v}$</td> </tr> <tr> <td>Newton'sche Reibung</td> <td>$\vec{F}_R = -\eta * \vec{v} * \vec{v}$</td> </tr> </table>		Schwerkraft	$\vec{F}_G = m * \vec{g}$	Coulomb'sche Reibung	$\vec{F}_R = \mu * \vec{F}_N $	Stoke'sche Reibung	$\vec{F}_R = -\vartheta * \vec{v} $	Newton'sche Reibung	$\vec{F}_R = -\eta * \vec{v} * \vec{v}$	1. Variable und Anfangsgrösse	$y(t)$: Einwohner t $y(0) = \dots$
Schwerkraft	$\vec{F}_G = m * \vec{g}$													
Coulomb'sche Reibung	$\vec{F}_R = \mu * \vec{F}_N $													
Stoke'sche Reibung	$\vec{F}_R = -\vartheta * \vec{v} $													
Newton'sche Reibung	$\vec{F}_R = -\eta * \vec{v} * \vec{v}$													
L	$u(t) = L * \frac{di(t)}{dt} = L * \dot{q}$	2. delta aufstellen	$\Delta y = \Delta y_{zu} - \Delta y_{ab}$ $\Delta y = \frac{x(t)}{1000} * \Delta t - 8 * \Delta t$											
C	$i(t) = C * \frac{du(t)}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{q}{C}$	3. DGL aufstellen	$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{x(t)}{1000} - 8$											
Maschensatz, Spannungsteiler		Statik $\sum_{i=1} \vec{F}_i = 0$	Dynamik $\sum_{i=1} \vec{F}_i = m * \ddot{s}$											

Lineare DGL 2.ter Ordnung

Lineare DGL 2ter Ordnung
 $y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$

$g(x) = 0 \rightarrow$ DGL 1. Ordnung durch Substitution ($z = y'$)
 $h(x)$: Störfunktion

homogen $h(x) = 0$

inhomogen $h(x) \neq 0$

mit konstanten Koeffizienten

mit konstanten Koeffizienten

$f(x) = a, g(x) = b$

$f(x) = a, g(x) = b$

Lösung mit Nullpunktsatz

1. Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

2. Fallunterscheidung

D	$\lambda_{1,2}$	$y_{hom}(x)$
$D > 0$	$(\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R})$	$= C_1 * e^{\lambda_1 x} + C_2 * e^{\lambda_2 x}$
$D = 0$	$(\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R})$	$= (C_1 x + C_2) * e^{\lambda x}$
$D < 0$	$(\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega \in \mathbb{C})$	$= (C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x) * e^{\alpha x}$

nur spezielle Lösung

$y(0) = \dots, y'(0) = \dots$

Laplace-Transformation
 (für x-ter Ordnung)

1. DGL laplacieren

$$y''(x) \circ \bullet s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)$$

$$f(x) y'(x) \circ \bullet f(x) s Y(s) - y(0)$$

$$g(x) y(x) \circ \bullet g(x) Y(s)$$

2. nach $Y(s)$ auflösen

$Y(s) = \dots$

3. Inverse Laplace-Transformation

Aufsuchen einer partikulären Lösung

1. Lösung der homogenen DGL

$y_{hom} = \dots$

2. Ansatz mit $h(x)$ für y_p ($h = h_1 + h_2$)

$y_p =$ (Tab. S. 282)

$y_p' = \dots$

$y_p'' = \dots$

3. y_p in DGL einsetzen $\rightarrow A, B, C$

$y_p'' + a y_p' + b y_p = h(x)$

4. Alles einsetzen

$y_{inh} = y_{hom} + y_p$

$h(x)$	Unterscheidung	y_p
Polynom	$b \neq 0$	$(c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0)$
	$a \neq 0, b = 0$	$x * (c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0)$
	$a = b = 0$	$x^2 * (c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0)$
e^{cx}	$c \neq \lambda_1$ und $c \neq \lambda_2$	$A * e^{cx}$
	$c = \lambda_1$ oder $c = \lambda_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$Ax * e^{cx}$
	$c = \lambda_1 = \lambda_2$	$Ax^2 * e^{cx}$
$\sin \beta x$ $\cos \beta x$	$j\beta \neq \lambda_1$ und $j\beta \neq \lambda_2$	$A * \sin \beta x + B * \cos \beta x$ oder: $C * \sin(\beta x + \varphi)$
	$j\beta = \lambda_1$ oder $j\beta = \lambda_2$	$x(A * \sin \beta x + B * \cos \beta x)$ oder: $Cx * \sin(\beta x + \varphi)$

Laplace-Transformation

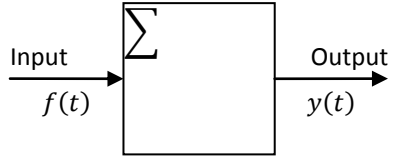
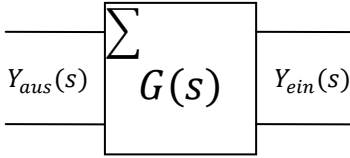
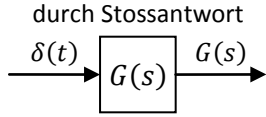
(L - Operator)		Reduzierte Transformationstabelle																						
<div style="border: 1px dashed green; padding: 5px; display: inline-block;"> Laplace-Transformation $G(s) = \int_0^{\infty} g(t) * e^{-st} dt$ </div>		g(t)	G(s)																					
<div style="border: 1px solid green; padding: 5px; display: inline-block;"> Funktion im Zeitbereich $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ </div>	○ — ●	<div style="border: 1px solid orange; padding: 5px; display: inline-block;"> Funktion im Bildbereich $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ </div>																						
$g(t) = 0$ für $t < 0$ $t \in \mathbb{R}$	<div style="border: 1px dashed blue; padding: 5px; display: inline-block;"> Inverse Laplace-Transformation </div>	$s = \sigma + i\omega$ $s \in \mathbb{C}$																						
Rezept bezüglich Nullstellen Typ: $\frac{P_1(s) \rightarrow \text{beliebig}}{P_2(s) \rightarrow \text{Polynom 2. Grades}}$																								
Nullstellen	Vorgehen	Ergebnis																						
$x_0 = 2 \in \mathbb{R}$	1. Partialbruchzerlegung	e^{at}																						
$x_0 = 1 \in \mathbb{R}$ (doppelt)	a. Faltungssatz wenn Zähler lin. linear b. Dämpfungssatz wenn Zähler konstant	e^{at}																						
$x_0 = 2 \in \mathbb{C}$	1. $\frac{s+2}{(s^2+2s+5)} \rightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2}$ 2. Dämpfungssatz für $s \Leftrightarrow (s+1)^2$ $\frac{s}{s^2+2^2} + \frac{1}{s^2+2^2} \circ \bullet \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2t)$	sin, cos																						
			<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">Dirac $\delta(t)$</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Heavyside'sche Sprungfunktion $1 = \sigma(t)$</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{s}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">e^{at}</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{s-a}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">t</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{s^2}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{s^n}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{a} \sin(at)$</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{1}{s^2 + a^2}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">cos(at)</td> <td style="text-align: center;"></td> <td style="text-align: center;">$\frac{s}{s^2 + a^2}$</td> </tr> </table>	Dirac $\delta(t)$		1	Heavyside'sche Sprungfunktion $1 = \sigma(t)$		$\frac{1}{s}$	e^{at}		$\frac{1}{s-a}$	t		$\frac{1}{s^2}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$		$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{a} \sin(at)$		$\frac{1}{s^2 + a^2}$	cos(at)		$\frac{s}{s^2 + a^2}$
Dirac $\delta(t)$		1																						
Heavyside'sche Sprungfunktion $1 = \sigma(t)$		$\frac{1}{s}$																						
e^{at}		$\frac{1}{s-a}$																						
t		$\frac{1}{s^2}$																						
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$		$\frac{1}{s^n}$																						
$\frac{1}{a} \sin(at)$		$\frac{1}{s^2 + a^2}$																						
cos(at)		$\frac{s}{s^2 + a^2}$																						

Regeln

Linearitätssatz	$a * f(t) + b * g(t)$ Addition	○ — ●	$a * F(s) + b * G(s)$ Addition
Verschiebungssatz	$\sigma(t-a) * f(t-a)$ Verschiebung n. rechts	○ — ● ○ — ● $a > 0$	$e^{-as} F(s)$ Dämpfung
Dämpfungssatz	$e^{-at} * f(t)$ Dämpfung	○ — ●	$F(s+a)$ Verschiebung n. links
Faltungssatz	$f(t) * g(t)$ Faltung	○ — ●	$F(s) * G(s)$ Multiplikation
	$Faltung: h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$		
Differentiationssatz	$f'(t)$ ○ — ● $f''(t)$ ○ — ● $f'''(t)$ ○ — ●	○ — ●	$s * F(s) - f(+0)$ $s^2 * F(s) - s * f(+0) - f'(+0)$ $s^3 * F(s) - s^2 * f(+0) - s * f'(+0) - f''(+0)$
Integrationsatz	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	○ — ●	$\frac{F(s)}{s}$
Grenzwertsätze „Anfangswerte haben einen Bezug zum Limes“	$\exists \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s * F(s)$	$\exists \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * F(s)$	$\exists f'(t) \forall t > 0$

Dirac-Stoss

Eigenschaften Keine Funktion, sondern eine Distribution Praktisch: kurzer, fester Schlag	$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\delta(t-\tau)$
Verwendung: zur Systemidentifikation		
$\delta(t) \rightarrow G(s)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) f(t) = f(\tau)$

Übertragungsfunktion $G(s)$		
Zeitbereich	Bildbereich	Systemidentifikation
		
Beschreibung des Σ durch lineare DGL = Lineare Übertragung z.B. $u_e = LC * \ddot{u}_a + RC * \dot{u}_a + u_a$	bei linearer Übertragung gilt $Y_{aus}(s) = G(s) * Y_{ein}(s)$ $u_a = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} * u_e$	Ein lineares System ist vollständig charakterisiert durch seine Stossantwort

- $G(s)$ beschreibt die vollständigen Eigenschaften des Systems
- Hintereinanderschaltung möglich: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

Lineare Schwingungen

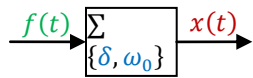
Der lineare Schwinger im Bildbereich

Schwingungsgleichung

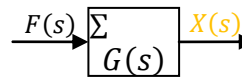
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

δ : Dämpfungskonstante ($\delta > 0$)

ω_0 : Eigenfrequenz ($\omega_0 > 0$)



Freie Schwingung $f(t) = 0$



Erzwungene Schwingung $f(t) = k_0 * \sin \omega t$
 schwach gedämpftes System: $0 < \delta < \omega_0$

allgemeine Lösung

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

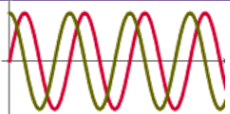
$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 2\delta s + \omega_0^2}$$

Lösung

$$A(\omega) = \frac{k_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

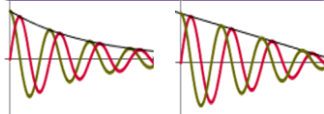
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} & , \omega < \omega_0 \\ \pi/2 & , \omega = \omega_0 \\ \tan^{-1} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} + \pi & , \omega > \omega_0 \end{cases}$$

ungedämpfte Schwingung
 $\delta = 0$



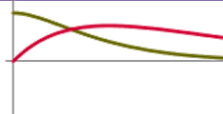
Lösung
 $C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$
 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

schwach gedämpfte Schwingung
 $0 < \delta < \omega_0$



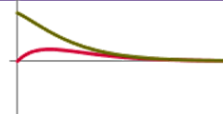
Lösung
 $e^{-\delta t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t)$
 $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

aperiodischer Grenzfall
 $\delta = \omega_0$

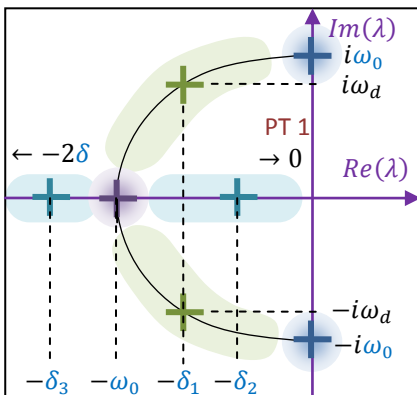
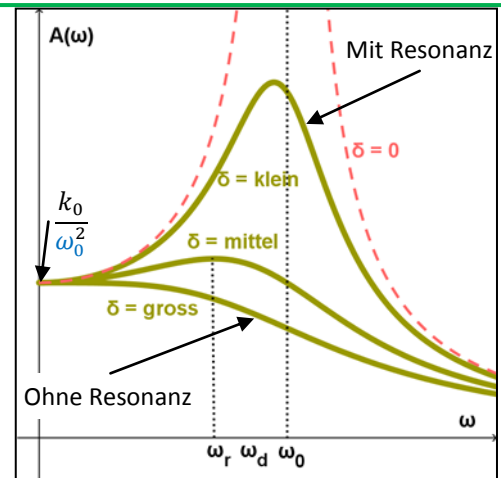
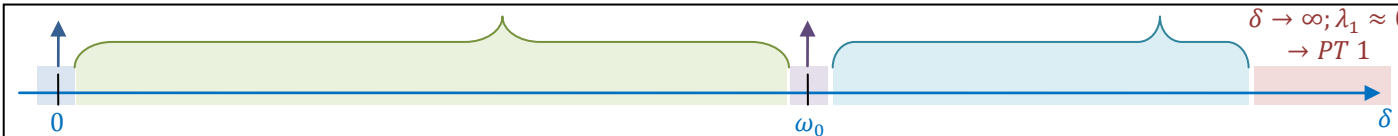


Lösung
 $(C_1 t + C_2) * e^{-\delta t}$
 $\lambda_{1,2} = -\delta$

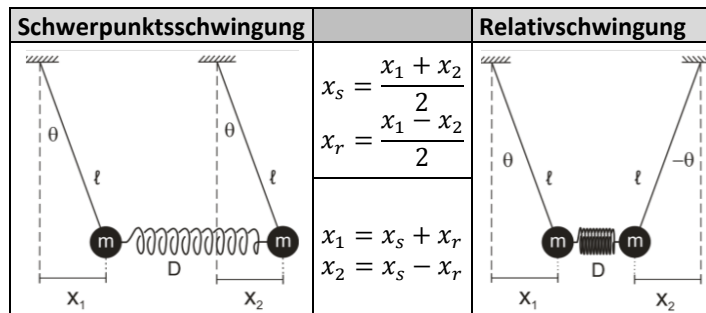
starke Dämpfung (Kriechfall)
 $\delta > \omega_0$



Lösung
 $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
 $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$



Gekoppelte Schwingung



Frequenzen
ungedämpftes System $\omega = \omega_0 = 2\pi f$
gedämpftes System $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
Resonanzfrequenz $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

