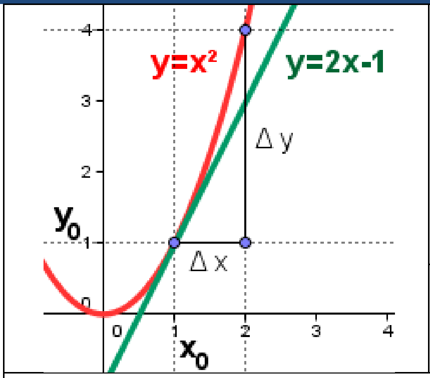
DIFFERENTIALRECHNUNG

Änderungsrate



Δx	x $(x_0 + \Delta x)$	y	Δy	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
1	2	4	3	3
0.1	1.1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1.0201	0.0201	2.01
…	…	…	…	…
0			0	2

Differenzialquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x) = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y) = 0$$
$$\lim_{x \to 2} (x^2) = 4$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) \cong 2$$

Mathematische Schreibweise:

$$\lim(\Delta x) = x_0$$

was passiert, wenn Δx unendliche nahe an Wert x_0 geht.

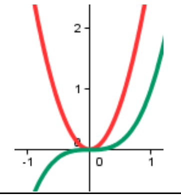
Differenzenquotient

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenzialquotient

$$\frac{df}{dx} = \left.\frac{dy}{dx}\right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ableitung



$$y = f(x) = x^3$$
$$\rightarrow Funktionswert\ bei\ x$$
$$y = f'(x) = 3x^2\ (Ableitung)$$
$$\rightarrow Steigung\ bei\ x$$

Beispiel

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x_0$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x|_{(\Delta x \to 0)} = 2x_0$$

Definition und Begriffe

Die Funktion $f(x)$ heisst an der Stelle von x_0 „differenzierbar“ (=ableitbar), wenn überall der Limes existiert.

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$	nicht differenzierbar bei
$f(x) = x^3$ $f(x) = x^2$ $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 - 1; x \geq 0 \\ -1; x < 0 \end{Bmatrix}$	$f(x) = \lvert x \rvert$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \begin{Bmatrix} -1; x > 0 \\ 2x; x < 0 \end{Bmatrix}$	- Hohlstellen - Knicken - Sprungstellen

Schreibweisen

$$y' = f' = (x^3)' = \frac{df}{dx}(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\dot{s}(t) \rightarrow s'(t)$$
$$\ddot{s} \rightarrow s'(s'(t))$$

Tangente, Normale

Tangente	$m = f'(x_0)$	$y(x) = f'(x_0) * x + f(x_0) - f'(x_0) * x_0$ $y(x) = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$ $x_0 = Tangentenberührungspunkt$
Normale	$m = -\frac{1}{f'(x_0)}$	$y(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} * x + \frac{x_0}{f'(x_0)} + f(x_0)$ $y(x) = -\frac{(x - x_0)}{f'(x_0)} + f(x_0)$ $x_0 = Normalenschnittpunkt$

Ableitungsregeln

Allgemeine	$(a * x^n)' = n * a * x^{n-1}$ $(f \pm g)' = f' \pm g'$ $(c * f)' = c * f'$
Faktorregel	$[c * f(x)]' = c * f(x)'$
Summenregel	$[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]'$
Produktregel	$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
Quotientenregel	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$[f_a(f_i(x))]' = f_a'(f_i(x)) * f_i'(x)$