LINEARE ABBILDUNGEN

Schwingungen als komplexe Zeiger

Im Reelen

$y = A * \sin(\omega t + \varphi)$	A	Amplitude	$\sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(\varphi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$
	ω	Kreisfrequenz		
	φ	Phasenverschiebung		

Im Komplexen

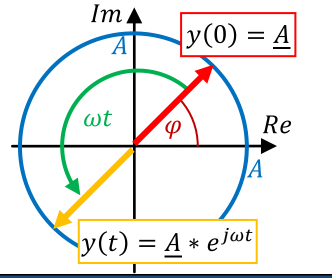
$y = A * \sin(\omega t + \varphi)$

$\underline{A} = A * e^{j\varphi}$

reell / imaginär

$y = Im(y)$
$A = |\underline{A}|$
$\varphi = \arg(\underline{A})$

$y = \underline{A} * e^{j\omega t}$



$\lvert\underline{A}\rvert$	Reelle Amplitude
$\underline{A}$	Komplexe Amplitude = Anfangszustand
$e^{j\omega t}$	Zeitfunktion

Analytische Geometrie

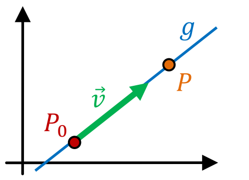
Gerade

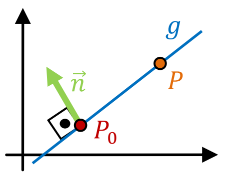
$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$P_0 = (x_0; y_0)$

$P = (x; y)$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$





Gleichungssys.
$\begin{vmatrix} x = Px_o + \lambda x_v \\ y = Py_o + \lambda y_v \end{vmatrix}$

Parameter entf.
$|x + y = \cdots|$

Punkt-Richtungs-Form = Parameterdarstellung

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda * \vec{v}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenform = Koordinatengleichung

$\vec{n} * \overrightarrow{P_0P} = 0$

$x_n x + y_n y = x_n x_0 + y_n y_0$

$g: 3x + 2y = 6$

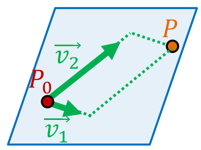
1 Punkt wählen
$P_0 = (0; y)$

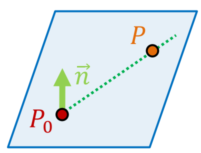
Normale bilden
$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y_n \\ x_n \end{pmatrix}$

Gegenseite Lage

	Schnittpunkt	Identisch	Windschief $\vec{v} \neq \lambda * \vec{\omega}$	Parallel $\vec{v} = \lambda * \vec{\omega}$
Schnittpunkte	1	∞	0	
Lösung LGls	$x = 3$	$0 = 0$	$3 = 4$	

Ebene





Kreuzprodukt
$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

Gleichungssystem
$\begin{vmatrix} x = \cdots + \lambda \ldots + \mu \ldots \\ y = \cdots + \lambda \ldots + \mu \ldots \\ z = \cdots + \lambda \ldots + \mu \ldots \end{vmatrix}$
Parameter entfernen
$|x + y + z = \cdots|$

Parameterdarstellung

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda * \vec{v_1} + \mu * \vec{v_2}$

$\vec{v_1} \neq \lambda * \vec{v_2}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Normalenform = Koordinatengleichung

$\vec{n} * \overrightarrow{P_0P} = 0$

$x_n x + y_n y + z_n z = x_n x_0 + y_n y_0 + z_n z_0$

$g: \ldots x + \cdots y + \cdots z = 6$

3 Punkte wählen
$P_1 = (0; 0; z)$
$P_2 = (0; y; 0)$
$P_3 = (x; 0; 0)$

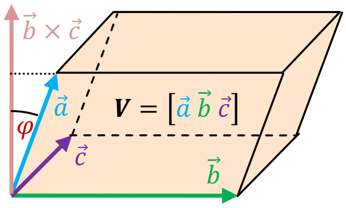
Parameterdarst.
$P_1 + \lambda(P_1P_2)$
$+ \mu(P_1P_3)$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ $P = (x; y; z)$ $\vec{v_1}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$

Kugel

2D	$x^2 + y^2 = R^2$	Kugel um 0-Punkt mit Radius R	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$
3D	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$		$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

Spatprodukt / Determinante

Spatprodukt (3-teilige Determinante) (für Volumenberechnung)	**Determinante** 2-reihig	3-reihig
	$[\vec a\, \vec b] = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$	$[\vec a\, \vec b\, \vec c] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$
	$[\vec a\, \vec b] = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$	**Handregel von Sarrus** $[\vec a\, \vec b\, \vec c] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \begin{matrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{matrix}$
$[\vec a\, \vec b\, \vec c] = \vec a(\vec b \times \vec c) = \lvert\vec a\rvert * \lvert\vec b \times \vec c\rvert * \cos\varphi$	$V = a_x b_y - b_x a_y$	$V = a_x b_y c_z + b_x c_y a_z + c_x a_y b_z$ $-c_x b_y a_z - a_x c_y b_z - b_x a_y c_z$

Reihenfolge

zyklisches Vertauschen (drehen des Koordinatensystem)	$[\vec a\, \vec b\, \vec c] = [\vec b\, \vec c\, \vec a] = [\vec c\, \vec a\, \vec b]$
Ansonsten Vorzeichen wechsel (spiegeln des Koordinatensystem)	$[\vec a\, \vec b\, \vec c] = -[\vec a\, \vec c\, \vec b]$

Matrix / Matrizen

Definition ($i = Zeile,\ j = Spalte$)

Matrix (Grossbuchstabe)	$A = (a_{ij})$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	`A=[2 5 7;3 6 1]` `A:=matrix([[2,5,7],[3,6,1]])`
Element einer Matrix (Kleinbuchstabe)	a_{ij}	$a_{12} = 5$ $a_{23} = 1$	`A(1,2) ->5 A(2,3) ->1` `A[1,2] ->5 A[2,3] ->1`
Dimension einer Matrix	$(Zeilen)x(Spalten)$ $-Matrix$	$2x3 - Matrix$	`size(A) -> 2 3` `linalg::matdim(A) -> [2,3]`

Spezielle Matrizen

Nullmatrix	$2x3$	$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	`zeros(2,3)` `matrix(2,3)`
Diagonalmatrix (quadratisch)	$3x3$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	`diag([4,6,8])` `matrix(3,3,[4,6,8],Diagonal)`
Symmetr. Matrix (quadratisch)	$3x3$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 13 \\ -2 & 6 & 0 \\ 13 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	
Einheitsmatrix (quadratisch)	$3x3$	$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	`eye(3)` `matrix::identity(5)`
	2x4	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	`ones(2,4)`

Elementare Matrix-Operationen

Gleichheit (gleiche Grösse & Inhalt)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	`isequal(A,B) ->1/0` `matrix::equal(A,B) ->true/false`
Addition (gleiche Grösse)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	`A+B` `A+B`
Multiplikation mit Skalar	$2 * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	`2*A` `2*A`
Transponierte	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	`A´` `linalg::transpose(A)`

Matrizenmultiplikation

Definition

$$\begin{array}{c|cccc|} & \text{Modul 1} & \text{Modul 2} & \text{Modul 3} & \text{Modul 4} \\ \hline \text{Syst. 1} & 1 & 3 & 2 & 4 \\ \textbf{Syst. 2} & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \text{Syst. 3} & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array} \quad * \quad \begin{array}{c|cc|} & \textbf{Teil 1} & \text{Teil 2} \\ \hline \text{Modul 1} & 7 & 1 \\ \text{Modul 2} & 1 & 6 \\ \text{Modul 3} & 0 & 5 \\ \text{Modul 4} & 2 & 3 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|cc|} & \text{Teil 1} & \text{Teil 2} \\ \hline \text{Syst. 1} & 18 & 41 \\ \text{Syst. 2} & 23 & 6 \\ \text{Syst. 3} & 5 & 40 \end{array}$$

$$\boldsymbol{n}\ x\ \boldsymbol{m} \quad * \quad \boldsymbol{m}\ x\ \boldsymbol{k} \quad = \quad \boldsymbol{n}\ x\ \boldsymbol{k}$$

```
A*B
A*B
```

Vorgehen Berechnung

1. Geht es aufgrund Grösse?
2. Grösse der resultierenden Matrix
3. Ausrechnen

Eigenschaften

~~Kommutativgesetz~~	$A * B \neq B * A$	
Distributivgesetz	$A * (B + C) = A * B + A * C$	$\neq B * A + C * A$
Assoziativgesetz	$(A * B) * C = A * (B * C)$	$= A * B * C$
Nullmatrix	$A * \mathbb{0} = \mathbb{0} * A = \mathbb{0}$	
Einheitsmatrix	$A * \mathbb{I} = \mathbb{I} * A = A$	
Transponieren	$(A * B)^T = B^T * A^T$	$\neq A^T * B^T$
	$A^2 = A * A$	$A^8 = ((A^2)^2)^2$
	$A * B = \mathbb{0} \nRightarrow A = \mathbb{0}\ oder\ B = \mathbb{0}$	

Inverse Matrix (Matrizendivision gibt es nicht!)

Definition	Anwendung	Berechnung	Befehle
• Quadratische Matrix • $A * A^{-1} = A^{-1} * A = \mathbb{I}$ $\rightarrow$ **A ist invertierbar**	$A * \vec{x} = \vec{b} \quad \mid * A^{-1}$ $\mathbb{I} * \vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$ $\vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$	$\left(A \left\lvert \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right. \right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\rvert A^{-1} \right)$ Gauss-Jordan (Gauss-Elimination)	`inv(A)` `A^-1`

Orthogonale Matrix

Definition	Beispiel		
Alle Zeilen-/Spaltenvektoren: • Die Länge 1 haben • Paarweise senkrecht(=orthogonal) aufeinander stehen (Skalarprodukt = 0) $\rightarrow$ ***A ist orthogonal***	$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	Länge	$\sqrt{(1/2)^2 + \left(-\sqrt{3}/2\right)^2} = 1$ $\sqrt{\left(\sqrt{3}/2\right)^2 + (1/2)^2} = 1$
		orthogonal	$\frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2} = 0$

Satz

$A\ ist\ orthogonal \Leftrightarrow A * A^T = \mathbb{I} \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$ Transponierte = Inverse $\Rightarrow \det(A) = \pm 1$

$A * A^{-1} = \mathbb{I}$

$+1 \rightarrow rotiert$

$-1 \rightarrow rotiert + gespiegelt$

Rang und Determinante

Rang

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < n$$

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 = n$$

$A\ ist\ regulär$	$A\ ist\ singulär$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$Rang(A) = n$	$Rang(A) < n$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\det(A) \neq 0$	$\det(A) = 0$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
A ist invertierbar	A ist **nicht** invertierbar

Lineare Abbildungen (= Funktion)

Definition

$f(x+y) = f(x) + f(y)$	Muss durch den Ursprung gehen	
$f(\lambda * x) = \lambda * f(x)$	$f(\vec{0}) = \vec{0}$	
$f(\vec{x}) = A * \vec{x}$	$f(\vec{x})$	Funktion mit Vektor
$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\blacksquare\\ \blacksquare\end{pmatrix}$	A	Abbildungsmatrix (nur Zahlen!!)

Komposition ($\circ = \boldsymbol{Kringel}$) / Umkehrung

$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend left, "f_C = f_B \circ f_A"] & y \arrow[r, "f_B"] & z \end{tikzcd}$	$z = f_B(f_A(x))$ $= f_B \circ f_A(x)$ $z = B * (A * x)$ $= (B * A) * x$	$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "f"] & y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$	$x = f^{-1}(f(x))$ $= (f^{-1} \circ f)x$ $x = A^{-1}(A * x)$ $= (A^{-1} * A)x$
$B * A \text{ ist die Abb.}-\text{Matrix von } f_B \circ f_A$		$A^{-1} \text{ ist die Abb.}-\text{Matrix von } f^{-1}$	

Spezielle lineare Abbildungen

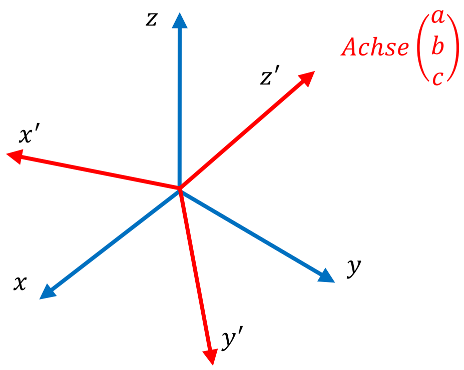
Singuläre Abbildungen	$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}$	Operation kann nicht rückgängig gemacht werden
Null-Abbildung	$A = \mathbb{O} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$	Setzt alles auf null
Projektion auf x	$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$	Projiziert auf die x-Achse
Projektion auf y	$A = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	Projiziert auf die y-Achse
Reguläre Abbildungen	$A = \begin{pmatrix}3 & 1\\3 & -2\end{pmatrix}$	Operation kann rückgängig gemacht werden
Identität	$A = \mathbb{I} = \begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$	Lässt alles gleich
Orthogonale Abbildung	$A = \begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$	Längentreu (und winkeltreu)
Rotationsabbildung (Drehung)	$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$	Drehung um den Winkel φ $\varphi > 0 \rightarrow GUZ$
Streckung um λ	$A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$	Streckung um den Faktor λ

Koordinatentransformation

1. Neues Koordinatensystem einführen

Erste Achse	Zweite Achse	Dritte Achse
die geg. Achse	Skalarprodukt	Kreuzprodukt
$\vec{z'} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$	$\vec{y'} \perp \vec{z'} \rightarrow \vec{y'} * \vec{z'} = 0$ $z.B. \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix}b\\-a\\0\end{pmatrix}$	$\vec{x'} = \vec{y'} \times \vec{z'}$ $\vec{x'} = \begin{pmatrix}-ac\\bc\\-a^2-b^2\end{pmatrix}$

Rotation von Punkt P um die Achse um φ



2. Einheitsvektoren bilden

$$\vec{e'_x} = \frac{\vec{x'}}{|\vec{x'}|} \qquad \vec{e'_y} = \frac{\vec{y'}}{|\vec{y'}|} \qquad \vec{e'_z} = \frac{\vec{z'}}{|\vec{z'}|}$$

3. Abbildung, um auf neues Koordinatensystem zu übertragen

$$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z} \rightarrow \vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e'_z}$$
$$A = \begin{pmatrix}\vec{e'_x} & \vec{e'_y} & \vec{e'_z}\end{pmatrix}$$

4. Transponierte

$$\vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e'_z} \rightarrow \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$$
$$weil\ A\ orthogonal$$
$$\rightarrow A^{-1} = A^T$$

5. Rotationsmatrix (z.B. φ um die z-Achse)

$$R = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Ausführen

$$\overbrace{A * R * A^T}^{B} * P$$

Punkt P
ins blaue System
Rotation
ins rote System