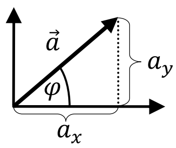
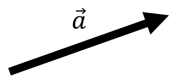
KOMPLEXE ZAHLEN UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Vektoren

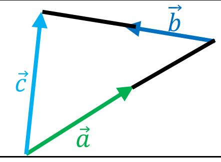
Definition: Parallelverschiebung, Pfeil(e) mit Länge und Richtung.

	Darstellung			Eigenschaften	
		Komponenten	Graphisch	Länge, Betrag	Zwischenwinkel
R^2	$\vec{a}$	$=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$		$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$	$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$ $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$
R^3		$=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$		$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$	

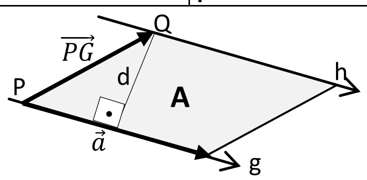
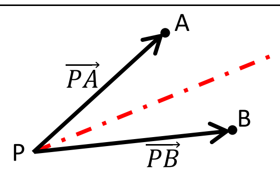
Vektorarten

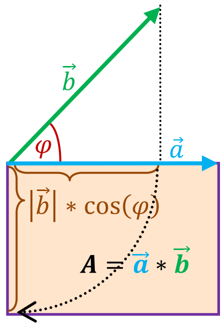
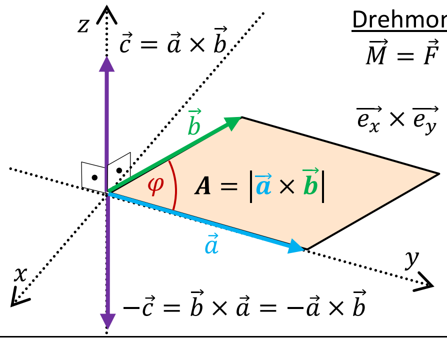
	Freier Vektor	$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(B) - \vec{r}(A)$	(Endpunkt – Anfangspunkt)
	Gebundener Vektor	z.B. Ortsvektor: $\vec{r}(A)$	(vom Koordinatenursprung aus)
	Nullvektor	$\vec{0}$, Vektor mit Betrag 0	$\lvert\vec{0}\rvert = 0$
	Einheitsvektor (Normierter Vektor)	$\vec{a_n} = \vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\vec{a} = a_x * \vec{e_x} + a_y * \vec{e_y} + a_z * \vec{e_z}$ Vektor mit dem Betrag 1	$e_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\vec{e_x} \perp \vec{e_y} \perp \vec{e_z}$ (orthogonal)
	linear abhängige Vektoren	Vektor $\vec{a}$ kann durch Vektor $\vec{b}$ dargestellt werden.	

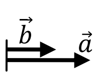
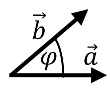
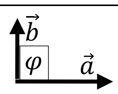
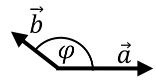
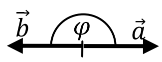
Vektoroperationen

Addition	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$\begin{pmatrix}a_x + b_x\\a_y + b_y\\a_z + b_z\end{pmatrix}$	
Subtraktion	$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$	$\begin{pmatrix}a_x - b_x\\a_y - b_y\\a_z - b_z\end{pmatrix}$	Addition des Gegenvektors
Multiplikation mit Skalar	$\lambda * \vec{a}$	$\begin{pmatrix}\lambda * a_x\\\lambda * a_y\\\lambda * a_z\end{pmatrix}$	
Linearkombination (Zerlegung)	$\vec{c} = u * \vec{a} + v * \vec{b}$ $\begin{pmatrix}c_x\\c_y\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix}c_x = u * a_x + v * b_x\\c_y = u * a_y + v * b_y\end{vmatrix}$	
Kommutativgesetz	$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$		
Assoziativgesetz	$\vec{a} + [\vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a} + \vec{b}] + \vec{c}$		

Abstände

	Punkt – Gerade	**parallele Geraden**	**Punkt – Punkt**
Skizze			
Idee	$A = \lvert\vec{a} \times \overrightarrow{PQ}\rvert$ $A = d * \lvert\vec{a}\rvert$		$\lvert\overrightarrow{PA}\rvert = \lvert\overrightarrow{PB}\rvert$ $\lvert\overrightarrow{PA}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{PB}\rvert^2$
Lösung	$d = \frac{\lvert\vec{a} \times \overrightarrow{PQ}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$		$\begin{vmatrix}A_x - P_x\\A_y - P_y\end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix}B_x - P_x\\B_y - P_y\end{vmatrix}^2$

	Skalarprodukt (Multiplikation)	Vektorprodukt (Vektorsumme)
Definition	Produkt aus der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ mit Hilfe des $\cos\varphi$ mit dem Betrag des Vektors $\vec{a}$	Operation, die aus 2 Vektoren ein 3ter macht, der ⊥ zu den Anderen steht (Drehachse).
algebraisch	$\vec{a} * \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert * \cos\varphi$	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert * \sin\varphi$
geometrisch	 Komponente von $\vec{b}$ in $\vec{a}$ $\vec{b_a} = \lvert\vec{b}\rvert * \cos(\varphi) * \vec{e_a}$ $\vec{b_a} = (\vec{e_a} * \vec{b}) * \vec{e_a}$ $\vec{b_a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert} * \frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	 Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{s}$ $\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z}$
Null	$\vec{a} * \vec{b} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{a} \upuparrows \vec{b}$ *oder* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
Prüfung	nach rechtwinklig (orthogonal)	nach kollinear (parallel und antiparallel)
Komponenten	$\vec{a} * \vec{b} = a_x * b_x + a_y * b_y + a_z * b_z$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ $c_x: \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \quad c_y: \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \quad c_z: \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}$
Gesetze	Kommutativgesetz $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$ Distributivgesetz $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$ ~~Assoziativgesetz~~ $(\vec{a} * \vec{b}) * \vec{c} \neq \vec{a} * (\vec{b} * \vec{c})$	Antikommutativgesetz $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Distributivgesetz $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ ~~Assoziativgesetz~~ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
Quadrat	$\vec{a}^2 = \vec{a} * \vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
	$(\vec{e} + 2\vec{f}) * (2\vec{e} + 3\vec{f})$ $= \vec{e} * 2\vec{e} + \vec{e} * 3\vec{f} + 2\vec{f} * 2\vec{e} + 2\vec{f} * 3\vec{f}$ $= 2\lvert\vec{e}\rvert^2 + 7(\vec{e} * \vec{f}) + 6\lvert\vec{f}\rvert^2$	$(\vec{e} + 2\vec{f}) \times (2\vec{e} + 3\vec{f})$ $= \cancel{\vec{e} \times 2\vec{e}} + \vec{e} \times 3\vec{f} + 2\vec{f} \times 2\vec{e} + \cancel{2\vec{f} \times 3\vec{f}}$ $= 7(\vec{e} \times \vec{f})$
Verhältnis	$\tan(\varphi) = \frac{\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert}{\vec{a} * \vec{b}}$	

Wertetabelle						
						
	φ	$0°$	$]0°; 90°[$	$90°$	$]90°; 180°[$	$180°$
	$\sin(\varphi)$	0	$]0; 1[$	1	$]1; 0[$	0
	$\cos(\varphi)$	1	$]1; 0[$	0	$]0; -1[$	-1
	$\vec{a} * \vec{b}$	$\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert$	$]\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert; 0[$	0	$]0; -\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert[$	$-\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert$
	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$	0	$]0; -\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert[$	$\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert$	$]\lvert\vec{a}\rvert * \lvert\vec{b}\rvert; 0[$	0

Lineare Gleichungssysteme LGlS

Definition	Mehrere Gleichungen (m) mit mehrere Unbekannten (n) nur in der ersten Potenz.	$x^i \rightarrow i = 1$
Beispiel	2x2-Gleichungssystem $\left\lvert \begin{matrix} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{matrix} \right\rvert$	3x3 Gleichungssystem $\left\lvert \begin{matrix} -x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 5 \\ 5x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 3 \end{matrix} \right\rvert$

Lösungsmethoden

Einsetzungsverfahren	$\left\lvert \begin{matrix} y = 5 - 2x \\ x + 2y = 5 \end{matrix} \right\rvert$ eine nach y auflösen	$\lvert x + 2(5 - 2x) = 5 \rvert$ y einsetzen
Gleichsetzungsverfahren	$\left\lvert \begin{matrix} y = 5 - 2x \\ y = \frac{5 - x}{2} \end{matrix} \right\rvert$ beide nach y auflösen	$\left\lvert 5 - 2x = \frac{5 - x}{2} \right\rvert$ beide gleichsetzen
Additionsverfahren Subtraktionsverfahren	$* -2 \left\lvert \begin{matrix} -4x - 2y = -10 \\ x + 2y = 5 \end{matrix} \right\rvert$ eine multiplizieren	$\lvert -3x = -5 \rvert$ beide addieren, subtrahieren
Multiplikationsverfahren Divisionsverfahren		

Gauss Algorithmus
(mit Faktor mul/div)
(zueinander add/sub)
(vertauschen)

x_1	x_2	x_3	b	
-1	$+1$	$+1$	0	I
1	-3	-2	5	II
5	1	4	3	III

Gauss-Tableau erstellen

Obere

x_1	x_2	x_3	b
-1	$+1$	$+1$	0
0	-2	-1	5
0	0	6	18

Untere

x_1	x_2	x_3	b
#	0	0	#
#	#	0	#
#	#	#	#

in Dreiecksform bringen

x_1	x_2	x_3	b	
-1	0	0	1	I
0	-2	0	8	II
0	0	6	18	III

in Diagonalform bringen

Anzahl Lösungen

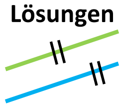
inhomogenes LGlS

$$\left\lvert \begin{matrix} 2x_1 & & + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 & & & = 3 \\ & x_2 + 3x_3 & & = 0 \end{matrix} \right\rvert \qquad \vec{b} \neq \vec{0}$$

eine Lösung

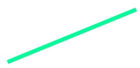
$$\left\lvert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\rvert$$

keine Lösungen



$$\left\lvert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right\rvert$$

$$\left\lvert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rvert$$

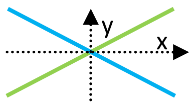


∞ Lösungen g=h

homogenes LGlS

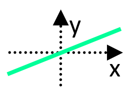
$$\left\lvert \begin{matrix} 2x_1 & & + x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 & & & = 0 \\ & x_2 + 3x_3 & & = 0 \end{matrix} \right\rvert \qquad \vec{b} = \vec{0}$$

triviale Lösung
(immer)



$$\left\lvert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rvert$$

$$\left\lvert \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rvert$$



Reduzierte Zeilen-Staffel-Form „rre-Form"

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	0	0	2	3	5	I
0	1	0	7	3	4	II
0	0	1	3	8	6	III
0			0		0	IV
					0	V

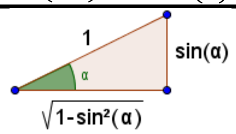
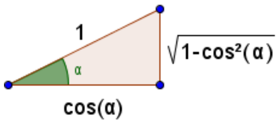
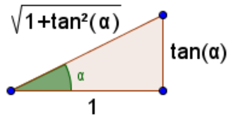
1. Variablen für x_4 bis x_5 wählen:	$x_4 = s;\ x_5 = t$
2. bekannte Variablen: Gleichung aufstellen $x_n = b_n - (x_4 * s) - (x_5 * t)$	$x_1 = 5 - 2s - 3t$ $x_2 = 4 - 7s - 3t$ $x_3 = 6 - 3s - 8t$
3. Lösungsvektor aufstellen $\vec{x} = (b) + s * (x_4) + t * (x_5)$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise (Schlusskontrolle)

$$A * \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Harmonische Schwingung (Trigonometrie)

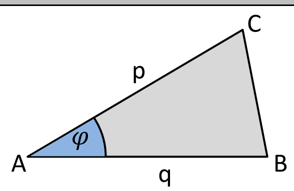
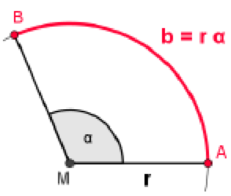
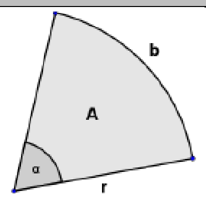
	Sinus	Cosinus	Tangens
algebraisch	$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$	$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$	$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$
geometrisch	y-Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis	x-Koordinate des Punktes P auf dem Einheitskreis	y-Koordinate des Punktes H auf dem Tangententräger
Definitionsbereich	$D = R$	$D = R$	$D = R\backslash\{\pi/2 + k * \pi\}; k \in Z$
Wertebereich	$W = [-1; 1]$	$W = [-1; 1]$	$W = R$
Symmetrie	$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
Ersetzung			

± ist abhängig vom Winkel α	$]0;\pi[$	$]\pi-2\pi[$	$]0;\frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$	$]\frac{3\pi}{2};\pi[$	$]0;\frac{\pi}{2}[$	$]\frac{\pi}{2};\pi[$	$]\pi;\frac{3\pi}{2}[$	$]\frac{3\pi}{2};\pi[$
Vorzeichen	+	−	+	−	+	+	−	+	−

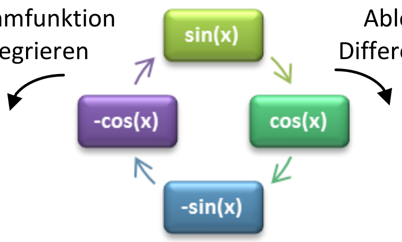
	Sinus	Cosinus	Tangens
Ersetzung durch sin	−	$\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$	$\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$
Ersetzung durch cos	$\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$	−	$\frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$
Ersetzung durch tan	$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$	−
Gesetze	**Sinussatz** $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$	**Kosinussatz** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(\alpha)$	**Trigonometrischer Pythagoras** $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Zusammenhänge	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$ $\cos(\alpha) = \sin(90° + \alpha)$	Additionstheoreme Papula S.94-97

Wertetabelle (mit Hilfe der speziellen Dreiecke)

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° 2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*err*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*err*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	*err*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	*err*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	*err*

Flächeninhalt	Bogenmass	Bogenlänge	Kreissektor
 $A = \frac{1}{2} * p * q * \sin(\varphi)$	$180° = \pi$ $\alpha(bog) = \frac{\pi}{180°} * \alpha(grad)$ $\alpha(grad) = \frac{180°}{\pi} * \alpha(bog)$	 $b = r * \alpha\ (rad)$	 $A = \frac{b * r}{2} = \frac{\alpha * r^2}{2}$

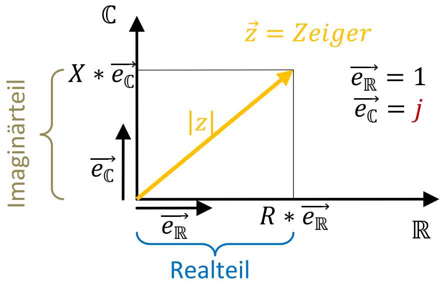
Schwingungen differenzieren und integrieren

Differenzieren		Integrieren
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ $\frac{d}{dx}\ldots = \ldots$	Stammfunktion Integrieren  Ableitung Differenzieren	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ $\int \ldots dx = \ldots + C$

$[A * \sin(\omega t + \varphi)]' = A\omega * \cos(\omega t + \varphi)$	$\int A * \sin(\omega t + \varphi)\,dt = -\frac{A}{\omega} * \cos(\omega t + \varphi) + C$
$[A * \cos(\omega t + \varphi)]' = -A\omega * \sin(\omega t + \varphi)$	$\int A * \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{A}{\omega} * \sin(\omega t + \varphi) + C$

Komplexe Zahlen

Algebraische oder kartesische Form



Definition

$$\vec{z} = R * \vec{e_{\mathbb{R}}} + X * \vec{e_{\mathbb{C}}}$$
$$\boxed{z = R + X * j}$$

Betrag

$$|z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{z | z = R + X * j \text{ mit } R, X \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahl j $\boxed{j^2 = -1}$

Zeiger

$$z = \underbrace{R}_{Re(z)} + \underbrace{X}_{Im(z)} * j$$

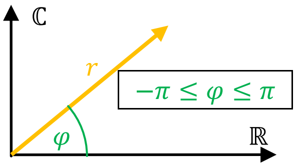
Gleichheit

$$z_1 = z_2$$

wenn:

$$R_1 = R_2 \wedge X_1 = X_2$$

Polarformen



Trigonometrische Form	$z = r(\cos\varphi + j * \sin\varphi)$
Exponentialform	$z = r * e^{j\varphi}$
Eulersche Form	$e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j * \sin\varphi)$

Betrag $|z|$

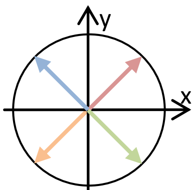
$$r = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Argument $arg(z)$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

Winkel φ

$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) + \pi$ | $\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$



$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) - \pi$ | $\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$

Taschenrechner gibt

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

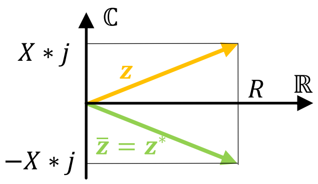
NTB will

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi$$

Periodizität

$$z = r * e^{j\varphi}$$
$$z = r * e^{j\varphi + 2\pi}$$

komplex konjugiert



kartesische Form	Exponentialform
$z = R + X * j$ $\bar{z} = z^* = R - X * j$	$z = r * e^{j\varphi}$ $\bar{z} = z^* = r * e^{-j\varphi}$

Potenzen

$j^0 = 1$
$j^1 = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = -j$
$j^4 = 1$
$j^5 = j$

Rechenoperationen

	Kartesische Form	Polarform
Addition /Subtraktion	$z_1 \pm z_2 = (R_1 \pm R_2) + j * (X_1 \pm X_2)$ Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	Assoziativgesetz: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
Multiplikation	$z_1 * z_2 = (R_1R_2 - X_1X_2) + (R_1R_2 + X_1X_2)j$ Kommutativgesetz: $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ Distributivgesetz: $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$	$z_1 * z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j * \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ $|z_1 * z_2| = r_1 * r_2$ $arg(z_1 * z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ Assoziativgesetz: $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{z_2^*}{z_2 * z_2^*}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	-	$z^n = r^n * e^{jn\varphi}$ $z^n = r^n * (\cos n\varphi + j * \sin n\varphi)$
Radizieren	-	Jede komplexe Zahl hat n versch. n-te Wurzeln $z_r = \sqrt[n]{r} * e^{\frac{j\varphi + k2\pi}{n}}$

Fundamentalsatz

Gleichung 2ten-Grades	**In ℝ gilt: Lösungen: maximal Höhe des Grades**	**In ℂ gilt: Eine Gleichung n-ten Grades hat genau n Lösungen**	
$f(x) = x^2 - 1$	$x_0 = 1, -1$	$x_0 = 1, -1$	
$f(x) = x^2$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$	
$f(x) = x^2 + 1$	$x_0 = \{\ \}$	$x^2 = -1 = j^2$	$x_0 = \pm j$

Hat man nur reelle Koeffizienten und z ist eine Lösung, dann ist z^* auch eine Lösung→ komplexe Lösungen existieren paarweise