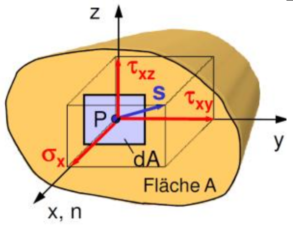
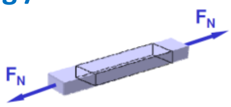
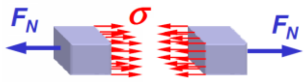
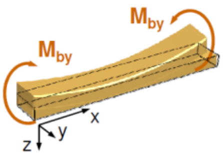
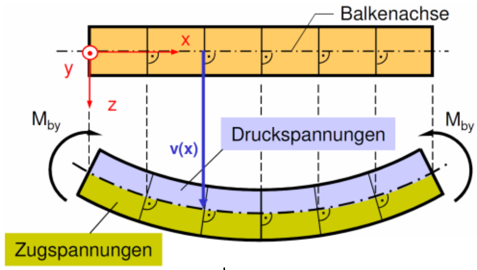
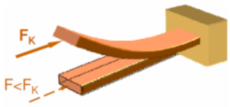
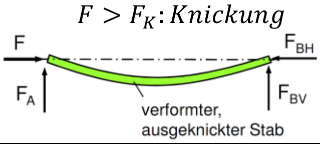
FESTIGKEITSLEHRE

Spannung

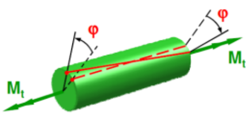
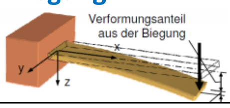
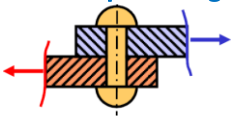
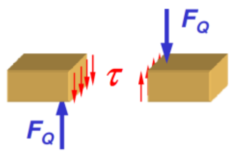
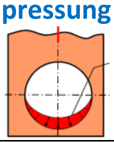
Definition				Spannungszustand		
$s = \frac{dF}{dA}$	s	Spannung (Innere Kräfte)	$[s] = \frac{N}{mm^2}$		σ_x	Normalspannung normal zur Fläche dA
	dF	auf dA angreifende innere Kräfte	$[dF] = N$		τ_{xy}	Schubspannungen liegen in der Fläche dA
	dA	Flächenelement in der Schnittfläche A	$[dA] = mm^2$		τ_{xz}	

Beanspruchungsarten

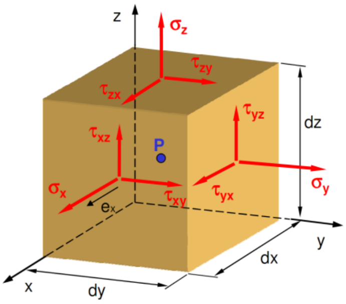
Normalspannung σ

Zug / Druck 	Normalkraft F_N Längsdehnung ->Verlängerung, Verkürzung	Zug -/Druckspannungen $\sigma_x(x) = \frac{F_N(x)}{A(x)} \leq \sigma_{zul}$ Spannung normal zur Schnittfläche	
Reine Biegung 	Biegemomente M_b Längsdrehung ->Biegung der Längsachse	Zugspannung / neutrale Faser / Druckspannungen 	
Stabilität (Knicken) 	Druckkraft F_K Knicken wenn $F = F_K$ ->Biegung der Längsachse	Hohe Deformation nicht linear Auslenkung quer zur Last Gleichgewicht am verformten Körper	$F < F_K: Zug, Druck$ $F > F_K: Knickung$ 

Schubspannung τ

Torsion 	Torsionsmoment M_t Gleitung der Querschnittsebene ->Verdrehung der Längsachse		
Querkraft-Schub bei Biegung 	Querkräfte F_{Qy}, F_{Qz} Gleitungen der Querschnittsebenen ->Biegung der Längsachse		
Scherbeanspruchung 	Dichte antiparallele Kräfte sehr grosse Gleitungen ->Abscherung	Schubspannungen $\tau(x) = \frac{F_Q(x)}{A(x)} \leq \tau_{zul}$ Spannung tangential zur Schnittfläche	
Flächenpressung 	Druckbelastung einer Fläche Oberflächenschädigung	$p(Flächenpressung) = \frac{F_N}{A} \leq p_{zul},\quad [p] = \frac{N}{mm^2}$	

Deformationszustand



Dehnung

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$	ε	Längsdehnung	$[\varepsilon] = (\ )$
	ΔL	Längenänderung	$[\Delta L] = m$
	L_0	Ursprüngliche Länge	$[L_0] = m$
$\Delta L = \frac{F_L * L_0}{E * A}$	F_L	Zug-/Druckkraft	$[F] = N$
	A	Beanspruchte Fläche	$[A] = m^2$
$\varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0}$	ε_q	Querdehnung	$[\varepsilon_q] = (\ )$
	d	ursprünglicher Querschnitt	$[d] = mm$
	d_0	neuer Querschnitt	$[d_0] = mm$
$\varepsilon_q = -\nu * \varepsilon$	ν	Querkontraktionszahl $\nu \sim 1/3$	$0 \leq \nu \leq 0.5$

Gleitung

γ	Gleitung (Winkelverkleinerung eines ursprünglich rechten Winkels)

HOOKEsches Gesetz

$\sigma = E * \varepsilon$	E	Elastizitätsmodul (YOUNGscher Modul)

Spannungstensor S

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

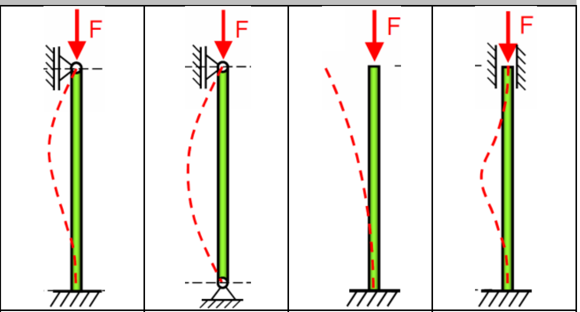
Verzerrungstensor D

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Knickung

$F_K = \frac{\pi^2 * E * I}{{L_K}^2}$	F_K	Knicklast
	I	Flächenträgheitsmoment „Widerstand gegen Durchbiegen“
$L_K = \alpha * L$	L_K	Knicklänge
$\lambda = \frac{L_K}{i}$	λ	Schlankheitsgrad
$i = \sqrt{I/_A}$	i	Trägheitsradius
$\lambda > \lambda_P$		Bedingung für Knickung nach Euler

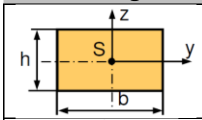
4 EULER-Knickfälle



$\alpha = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.5$

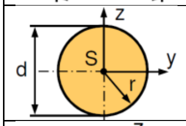
Flächenmomente $[I] = mm^4$

Flächenträgheitsmomente 2 Grades



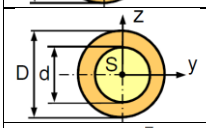
Rechteck

$I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$	$I_{zz} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{yz} = 0$



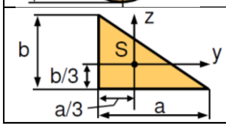
Kreis

$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi r^4}{4}$	$I_{yz} = 0$



Kreisring

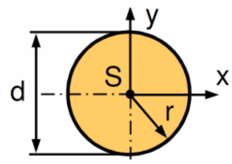
$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$I_{yz} = 0$



Dreieck

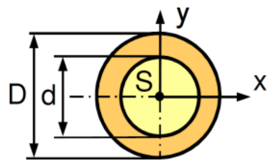
$I_{yy} = \frac{ab^3}{36}$	$I_{zz} = \frac{ba^3}{36}$	$I_{yz} = \frac{a^2b^2}{72}$

Polare Flächenmomente



Kreis

$$I_P = \frac{\pi r^4}{2}$$

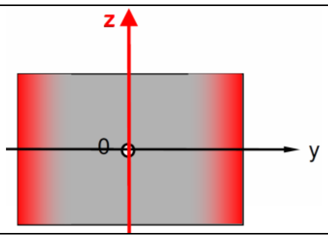


Kreisring

$$I_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

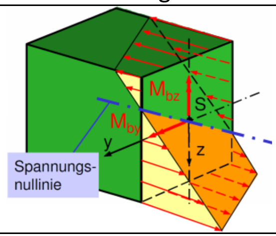
Schiefe Biegung & Torsion

Aussen zählt mehr



Biegung um z
→ grösserer Abstand von z zählt mehr

Resultate überlagern sich

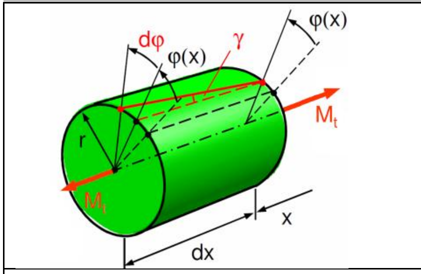


$\sigma_x(x,y,z) = \frac{M_{by}(x)}{I_{yy}(x)} z - \frac{M_{bz}(x)}{I_z(x)} y$
vektoriell addieren $\vec{f} = \vec{v} + \vec{w}$

Sicherheit

$$\sigma_{zul}, \tau_{zul}, p_{zul} = \frac{Material\ Kennwert}{Sicherheit}$$

Torsion



$$v(x) = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma(r)}{r}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(x+l) - \varphi(x)$$

$$\Delta\varphi = \frac{M_t}{G * I_P} l$$

Verdrillung (nicht Verdrehwinkel)
„Verdrehwinkel pro Längeneinheit"

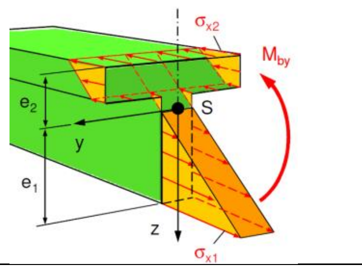
$$[v] = \frac{rad}{m}$$

$$v(x) = \frac{M_t(x)}{G * I_P}$$

Normal-Spannung

$$\sigma_x(x,z) = \frac{M_{by}(x)}{I_{yy}(x)} z$$

Biegung



$$\sigma_{x,max}(x) = \frac{M_{by}(x)}{W_{yy}}$$

Widerstandsmoment

$$W_{yy} = \frac{I_{yy}}{|z_{max}|}$$

Krümmung (nicht Auslenkung)
$w(x) =$ Quer-Auslenkung

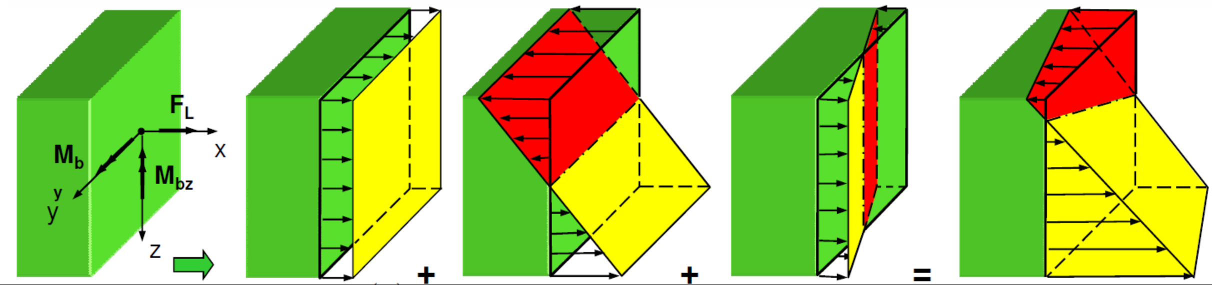
$$w''(x) = \frac{-M_{by}(x)}{E * I_{yy}}$$

Schub-Spannung

$$\tau_t(z,r) = \frac{M_t(x)}{I_p(x)} r$$

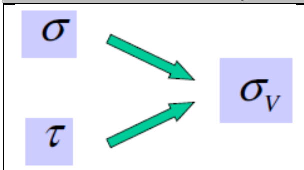
Zusammensetzung von Spannungen

Satz: Gleichartige Spannungen lassen sich addieren



	$\sigma_x(x) = \frac{F_L(x)}{A(x)}$	$\sigma_x(x,y) = \frac{M_{by}(x)}{I_{yy}(x)} z$	$\sigma_x(y,z) = -\frac{M_{bx}(x)}{I_{zz}(x)} y$	$\sigma_x(x,y,z)$

Satz: Verschiedene Spannungen lassen sich zu einer Vergleichsspannung verrechnen



Normalspannungs-Hypothese	spröd oder Stoss	$\sigma_{v1} = \frac{1}{2}\left(\lvert\sigma\rvert + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right)$
Schubspannungs-Hypothese	zäh und statisch	$\sigma_{v2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$
Gestaltänderungs-Hypothese von MISES	fast immer	$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

Beispiele