FOURIER-REIHEN

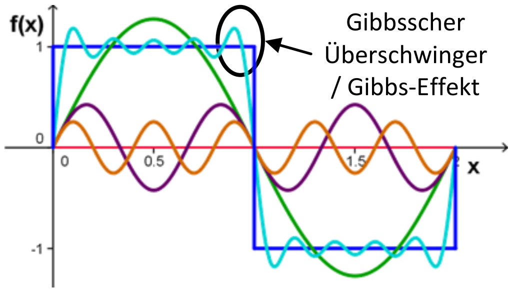
Jede periodische Funktion lässt sich als unendliche Summe von trigonometrischen Funktionen schreiben!

Fourier-Polynom

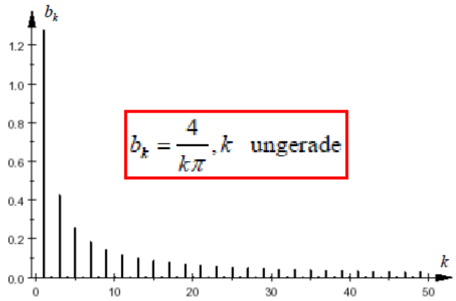
1. Funktion	$f(t)$ *sei periodisch mit Periode* T $f(t) = \begin{cases} -1 \text{ für } t \in [-1,0) \\ 1 \text{ für } t \in [0,1) \end{cases}$ $T = 2$ | $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$ | $\omega_0 = 2\pi f_0 = \pi$, $\omega_0 = ggt(..)$
2. Gleichanteil	Mittelwert der Funktion: $a_0/2 = 0$
3. Fourier-Spektrum (Gesamtheit der Fourier-Koeffizienten)	**Gerade Funktionen:** $f(t) = f(-t)$ $\rightarrow b_k = 0, \quad c_k = c_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{R}$ **Ungerade Funktionen:** $f(t) = -f(-t)$ $\rightarrow a_k = 0, \quad c_k = -c_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{C}$
4. Grundschwingung	$f_1(x) = {}^4/_\pi \sin(\pi * x)$
5. Oberschwingungen	$f_3(x) = {}^4/_{3\pi} \sin(3\pi * x)$ $f_5(x) = {}^4/_{5\pi} \sin(5\pi * x)$
6. Fourier-Polynom	Fourier-Reihe mit endlichen Summanden $z.B. 9, \quad f_{1-9} = f_1 + f_2 + \cdots + f_9$

$k =$	1	2	3	...
a_k	0	0	0	...
b_k	${}^4/_\pi$	0	${}^4/_{3\pi}$	...

Darstellung des Zeitverlaufs



Darstellung des Spektrums



Fourier-Reihen

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad k = 0,1,..$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \quad k = 1,2,..$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) * e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$c_{-k} = (c_k)^* \rightarrow reell$

$k = \ \dots, -1,0,1, \dots$

Reelle Darstellung

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{Gleichanteil}} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t))}$$

$k = 1$: *Grundschwingung*

$k > 1$: *Oberschwingung*

$a_0 = 2c_0$
$a_k = 2Re(c_k)$
$b_k = -2Im(c_k)$
$k = 1,2,..$

$c_0 = a_0/2$
$c_k = {}^{(a_k - jb_k)}/_2$
$c_{-k} = {}^{(a_k + jb_k)}/_2$
$k = 1.2..$

Komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{jk\omega_0 t}$$

$A_0 = |a_0|/2$
$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$
$\varphi_k = \tan^{-1}\left(-{}^{b_k}/_{a_k}\right)$
$k = 1,2,..$

$a_0 = 2A_0 \ (wenn\ \varphi_0 = 0)$
$a_0 = -2A_0 \ (wenn\ \varphi_0 = 180°)$
$a_k = c_k + c_{-k}$
$b_k = j(c_k - c_{-k})$
$k = 1,2,..$

$A_0 = |c_0|$
$A_k = 2|c_k| \quad k = 1,2,..$
$\varphi_k = \arg(c_k) \quad k = 0,1,..$

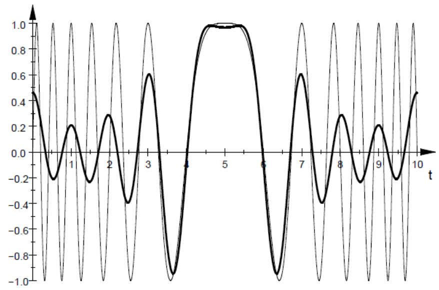
$c_0 = A_0 e^{j\varphi_0}$
$c_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}$
$c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$
$k = 1,2,..$

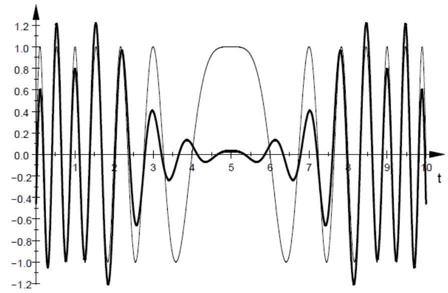
Amplitude und Phase

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{A_k}_{\text{Amplitude}} \cos(k\omega_0 t + \underbrace{\varphi_k}_{\text{Phase}})$$

Filter

Tiefpassfilter	**Hochpassfilter**	**Idealer Tiefpass**
Lässt tiefe Frequenzen (fast) unverändert, dämpft hohe Fourier-Koeffizienten	Lässt hohe Frequenzen (fast) unverändert, dämpft tiefe Fourier-Koeffizienten	(lässt Frequenzen bis $f_{Grenz} = K * f_0$ unverändert durch) $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k c_k e^{jk\omega_0 t}$ $g_k = \begin{cases} 1 \text{ für } \|k\| \le K \\ 0 \text{ für } \|k\| > K \end{cases}$





Fourier-Koeffizienten Idealer Filter

Bandpassfilter Dämpft bis auf ein Frequenzband tiefe und hohe Frequenzanteile