FOURIER-TRANSFORMATION

Kontinuierliche Fourier-Transformation

Verallgemeinerung der Fourier-Reihe für nicht periodische Signale!

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Funktion im Zeitbereich $f(t)$ ○—● **Funktion im Frequenzbereich** $\hat{f}(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$f(t)$		$\hat{f}(\omega)$
Konstante A	○—●	**Dirac-Stoss** $2\pi A * \delta(\omega)$
Dirac-Stoss $A\delta(t)$	○—●	**Konstante** A
Rechteck-Fenster $\begin{cases} A, \lvert t \rvert \le 0.5T_0 \\ 0, \lvert t \rvert > 0.5T_0 \end{cases}$	○—●	$A \dfrac{2\sin\left(\frac{T_0}{2}\omega\right)}{\omega}$
$\dfrac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	○—●	**Idealer Tiefpass** $\begin{cases} 1, \lvert \omega \rvert \le \omega_0 \\ 0, \lvert \omega \rvert > \omega_0 \end{cases}$

Dirac-Stoss: $\delta(t) = \lim_{T_0 \to 0} rect(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \qquad \delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0$$

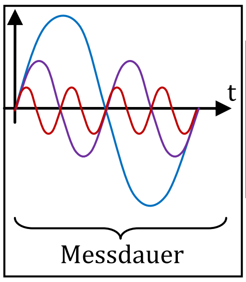
- Fourier-Transformation ist linear

Reelle f(t): f(t) = gerade, wenn $\hat{f}(\omega)$ reell und gerade ist; f(t) = ungerade, wenn $\hat{f}(\omega)$ imaginär und ungerade ist

- Spektrallinie im Fourierspektrum = komplexe Exponentialfunktion mit der entsprechenden Frequenz
- Die Fourier-Transformierte der sin, cos Funktion besteht jeweils aus zwei Spektrallinien bei ω und $-\omega$

Diskrete Fourier-Transformation

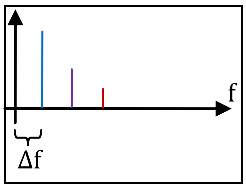
Berechnung der Fourier-Koeffizienten aus Funktionswerten von nicht periodischen, bandlimitierten Signalen!



DFT:
$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jkn2\pi/N}$$

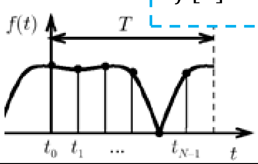
Funktionswerte im Zeitbereich
$$f[n] = f(n * \Delta t), \quad n \in \mathbb{C}$$

Funktionswerte im Frequenzbereich
$$\hat{f}[k] = \begin{cases} c_m * N & m: 0..K \\ c_{m-2K-1} * N & m: (K+1)..(2K) \end{cases} \quad k \in \mathbb{C}$$



IDFT:
$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{jkn2\pi/N}$$

Theorem von Shannon
$$f_s > 2 * f_{max}$$



Fourier-Koeffizienten

$k > 0$	$k \ge 1$	
$c_k = \dfrac{\hat{f}[k]}{N}$	$c_{-k} = \dfrac{\hat{f}[2K+1-k]}{N}$	oder $c_{-k} = c_k^*$

- Funktion muss **bandlimitiert** sein (endliche Fourier-Koeff.)

$$\hat{f}(\omega) = 0 \text{ für } \lvert \omega \rvert > 2\pi f_{max}$$
$$c_k = 0 \text{ für } \lvert k \rvert > f_{max}/f_0$$

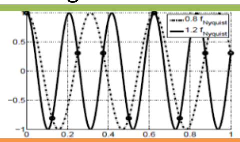
- $f(t)$ ist eindeutig bestimmt durch $\boxed{N = 2K + 1}$ Fourier-Koeffizienten
- Verlustfrei = Signale bis zu f_{max} zu detektieren:

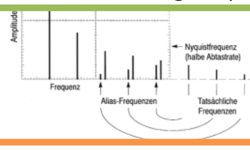
$$\boxed{f_{max} < f_{Niquist}}$$

- Für reelle Funktionen ($c_{-k} = c_k^*$)
- $\omega_{max} = max(\omega_1, \omega_2, \dots)$

$k, n = 0, .., N-1$	Indizes
$N = T * f_s$	Anzahl Samples (Punkte)
$f_{max} = k * f_0$	Grenzfrequenz
$f_{Nyquist} = 0.5 f_s$	Nyquist-Frequenz
$f_s = N/T = N * f_0$	Sampling-Frequenz
$\Delta t = 1/f_s = T/N$	Abtastintervall
$\Delta f = 1/Messdauer$	Abtastfrequenz
$t_i = i * \Delta t$	Stützstellen

	Problem	Folge	Lösung
Aliasing	wenn $\boxed{f_{max} > f_{Niquist}}$ = wenn Theorem von Shannon nicht eingehalten wird	Amplitudenspektrum wird an der Nyquist-Frequenz gespiegelt → nicht das „richtige“ Spektrum	Mit einem analogen Tiefpassfilter das Signal filtern, um Aliasing zu vermeiden
Leackage (lecken)	keine ganze Anzahl an Perioden -> Abrupte Übergänge	neue Spektrallinien	Fensterfunktionen Amplitude leidet,verschmiert
Verschmieren	mehrere Peaks da Keule breiter als die Funktion	falsche Amplitude	grössere Messdauer oder grösseres Fenster (Effekt zu klein) Zero-Padding





Nach dem Samplen kann das Spektrum nicht mehr repariert werden