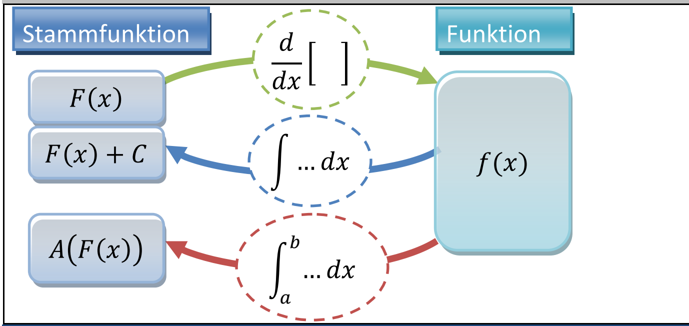
INTEGRALRECHNUNG

Elementare Integration

Differentialoperator	Integraloperator
$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$	$\int_0^a f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_0^a = F(a) - F(0)$ $\qquad \int f(x)dx = F(x) + C$

Übersicht



Spezielle Funktionen

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$e^0 = 1 \qquad e^{\ln 5} = 5$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

$y^2 = \sqrt{9} \rightarrow y = \pm 3$

Logarithmen

$$\int \ln x\ dx = x(\ln x - 1) + C$$

$(u^2)^{\frac{1}{2}} = |u|$

$2 * \ln|u| = \ln|u^2| \qquad \ln(a) + \ln(b) - \ln(c) = \ln\left(\frac{a*b}{c}\right)$

Integrationsmethoden

Substitution (für Funktion in Funktion)

unbestimmte Integrale

$$\int \frac{1}{3x-2}dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$$

$3x - 2 = u$	1. Vereinfachen
$\frac{du}{dx} = 3$	2. Substitution
$dx = \frac{du}{3}$	3. $dx \rightarrow du$
	4. Integrieren
	5. Rücksubstitution

bestimmte Integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{3x-2}dx = \int_1^4 \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\Big[\ln|u|\Big]_1^4 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1)$$

$3x - 2 = u$	1. Vereinfachen
$\frac{du}{dx} = 3$	2. Substitution
$dx = \frac{du}{3}$	3. Grenzen für u anpassen
	4. $dx \rightarrow du$
	5. Integrieren

Partielle Integration (Funktion mal Funktion)

unbestimmte Integrale

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

bestimmte Integrale

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

Integration durch Partialbruchzerlegung (Funktion durch Funktion)

Gebrochenrationale Funktion

$y = \frac{Pn(x)}{Qm(x)}$	$Pn(x) = Polynom\ n - ten\ Grades$
	$Qn(x) = Polynomm\ m - ten\ Grades$

$m \leq n$	unecht gebrochenrationale Funktion
$m > n$	echt gebrochenrationale Funktion

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen herausfinden:

$n_{x_0} = Anzahl\ A, B, C, \dots$

2. Gleichung aufstellen

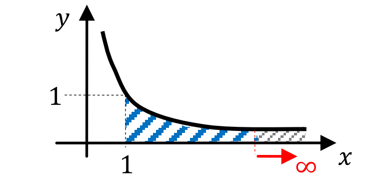
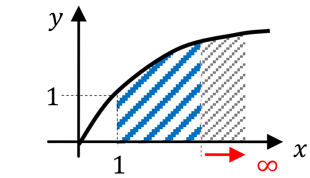
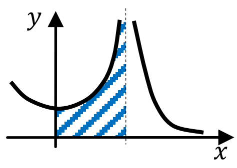
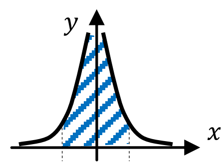
Polynomdivision (nur bei unecht gebrochenrationale Funktion)

$$\underbrace{(x^3 - 7x^2 + 7x + 15)/(x^2 - 4)}_{\text{unecht geb.rat. Funktion}} = \underbrace{x - 7}_{\text{Polynom}} + \underbrace{\frac{11x - 13}{x^2 - 4}}_{\text{echt geb.rat. Funktion}}$$

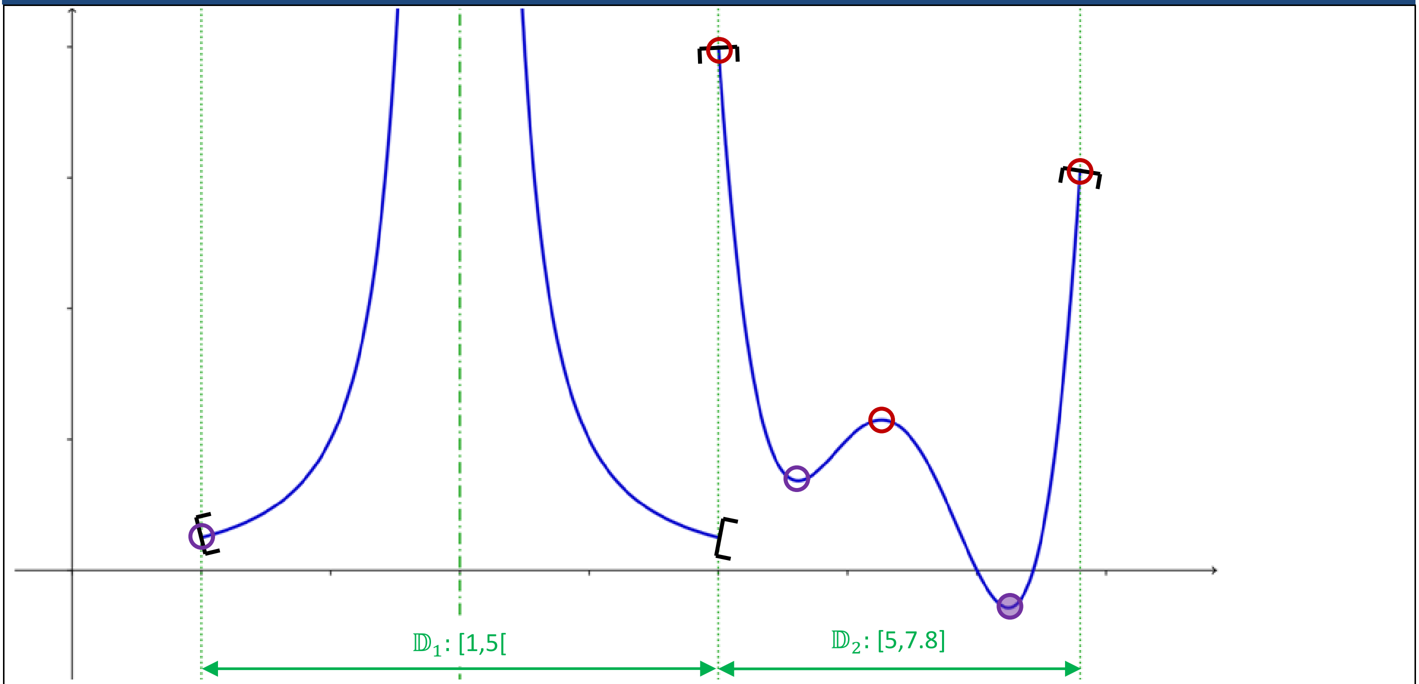
$$\frac{2x^2 + 5x + 4}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)} = \frac{A(x-a)(x-b)}{(x-a)} + \frac{B(x-b)}{(x-a)^2} + \frac{C(x-a)^2}{(x-b)}$$

$$\frac{x^2(A + C) + x(-aA - bA + B - 2aC) + abA - bB - a^2C}{(x-a)^2(x-b)} \rightarrow \left|\begin{array}{r} A + C = 2 \\ -aA - bA + B - 2aC = 5 \\ abA - bB - a^2C = 4 \end{array}\right|$$

Uneigentliche Integrale

Grenze im Unendlichen		Pole als Grenzen	
konvergiert	**divergiert** (konvergiert nicht)	**Bis zur Polstelle** konvergiert	**Über eine Polstelle** Niemals
$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty$ $A = \frac{1}{2}$ (endlich)	$\int_1^\infty \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^\infty$ $A = \infty$ (unendlich)	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \Big[\arcsin x\Big]_0^1$ $A = \frac{\pi}{2}$ (endlich)	$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx \neq \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1$ $= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ $A = \infty$ (unendlich)
			

Extremalprobleme



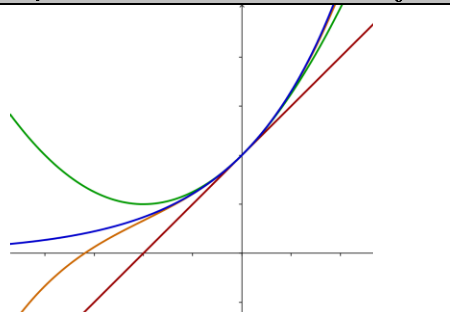
lokales	Maxima	○ (rot)	• Sprungstelle, wenn Wert inbegriffen • Horizontale Tangente $f'(x) = 0$ • Am Rande des $\mathbb{D}$	• Keine Polstellen
	Minima	○ (violett)		
globales	Maxima	● (rot)	• Höchste, tiefste der lokalen Extrema • Bei tieferem Pol, kein glob. Extrema	• bei gleicher Höhe lokalen Extrema sind alles globale Extrema
	Minima	● (violett)		

5-Schritt-Verfahren

1	optimierende Grösse? steuerbare Grösse?	A x
2	optim. Grösse als Funktion der steuerb. Grösse ausdrucken Nebenbedingungen definieren	$A(x) = \cdots x$ $\ldots \leq x \leq \cdots$
3	Extremalwerte von $f(x)$ bestimmen	$x_{min}, x_{max} = \cdots$ | $A'(x) = 0$
4	Maximum oder Minimum bestimmen	$A''(x) = \cdots$ $> 0 \rightarrow min$ $< 0 \rightarrow max$
5	Optimum berechnen, Ränder berechnen (Nebenbedingungen)	$A(x_{min}), A(x_{max}) = \cdots$ $A(x_{rand}) = \cdots$

Taylorpolynome

Taylor-Reihe der Funktion e^x bei $x_0 = 0$



$f(x)$	e^x	Funktion
$p_1(x, x_o = 0)$	$x + 1$	Tangente / Linearisierung • Lineare Näherung • Potenzreihenentw. 1.Grades
$p_2(x, x_0 = 0)$	$\frac{1}{2}x^2 + x + 1$	Schmiegeparabel • Quadratische Näherung • Potenzreihenentw. 2.Grades
$p_3(x, x_0 = 0)$	$\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$	Potenzreihenentwicklung 3.Grades

Herleitung

Tangente, Linearisierung		Schmiegeparabel		Potenzreihenentwicklung 3ten Grades	
$f(x) = p_1(x)$ $e^x = ax + b$	$bei\ x_0 = 0$	$f(x) = p_2(x)$ $e^x = ax^2 + bx + c$	$bei\ x_0 = 0$	$f(x) = p_3(x)$ $e^x = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$bei\ x_0 = 0$
$f(0) = p_1(0)$ $f'(0) = p_1'(0)$	$\rightarrow b = 1$ $\rightarrow a = 1$	$f(0) = p_2(0)$ $f'(0) = p_2'(0)$ $f''(0) = p_2''(0)$	$\rightarrow c = 1$ $\rightarrow b = 1$ $\rightarrow a = 1/2$	$f(0) = p_3(0)$ $f'(0) = p_3'(0)$ $f''(0) = p_3''(0)$ $f'''(0) = p_3'''(0)$	$\rightarrow d = 1$ $\rightarrow c = 1$ $\rightarrow b = 1/2$ $\rightarrow a = 1/6$

Potenzreihenentwicklung n-ten Grades / Satz von Taylor

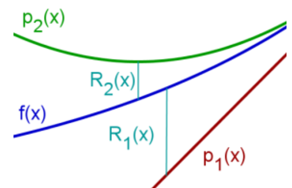
$p_n{}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$	Sei $f(x)$ eine $(n+1)$mal differenzierbare Funktion, dann lässt sich $f(x)$ um das Entwicklungszentrum x_0 entwickeln.

Taylor-Reihe

$$f(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x - x_0)^n$$

Eigenschaften von $R_n(x)$



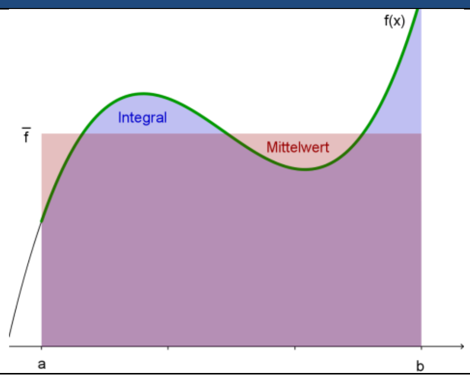
$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in [x_i, x_0]$$

$$R_n(x) > R_{n+1}(x), \qquad \text{wobei } x \approx x_0$$

Bekannte Funktionen

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

Anwendungen der Integralrechnung



Linearer Mittelwert

$$\overline{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{b-a} * \int_a^b f(x)dx$$

Quadratischer Mittelwert

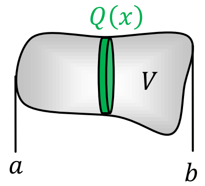
$$\overline{f_{quadr}} = \langle f^2 \rangle = \sqrt{\frac{1}{b-a} * \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx}$$

Bogenlänge in der Ebene

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Rotationen

	Volumenkörper	Mantelfläche	
	$V = \int dV = \int_a^b Q(x)dx$	$A = \int_a^b f(x)dx$	$M = \int_a^b dM$
um x-Achse	$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$	
um y-Achse	$V = \pi \int_a^b g(y)^2 dy$	$M = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{1+g'(y)^2}dy$	



$Q(x) = Schnittfläche$
$g(y) = f^{-1}(x)$

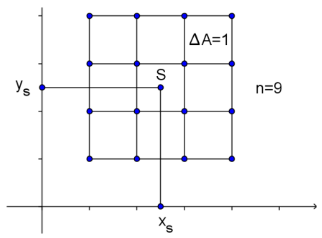
Beispiele (Papula S.33-40)

Funktionen		Volumen		Mantelflächen	
Halbkreis	$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$	Kugel	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	Kugel	$M = 4\pi r^2$
		Kegel	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	Kegel	$M = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

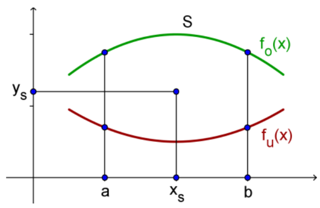
Schwerpunkt

Der Punkt, der gedachten Gesamtmasse, damit dieser ein Drehmoment erzeugt, wie der reale Körper.

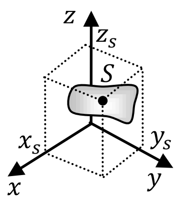
einer Fläche



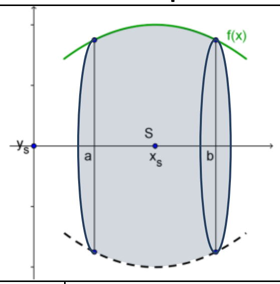
zweier Funktionen



eines Volumen



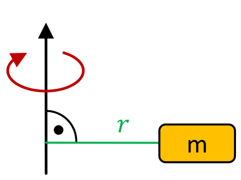
von Rotationskörper



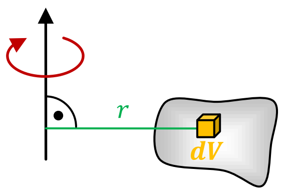
	einer Fläche		zweier Funktionen	eines Volumen	von Rotationskörper	
x_s	$\frac{1}{A}\int_A x\,dA$	$\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} x_i * \Delta A_i$	$\frac{1}{A}\int_a^b x\big(f_0(x) - f_u(x)\big)dx$	$\frac{1}{V}\int_V x\,dV$	um X	$\frac{\pi}{V}\int_a^b x f(x)^2 dx$
					um Y	0
y_s	$\frac{1}{A}\int_A y\,dA$	$\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} y_i * \Delta A_i$	$\frac{1}{2A}\int_a^b \big(f_0^2(x) - f_u^2(x)\big)dx$	$\frac{1}{V}\int_V y\,dV$	um X	0
					um Y	$\frac{\pi}{V}\int_a^b y g(y)^2 dy$
z_s	–		–	$\frac{1}{V}\int_V z\,dV$	um X	0
					um Y	0

Massenträgheitsmoment J

Definition: „Widerstand gegen Rotation“



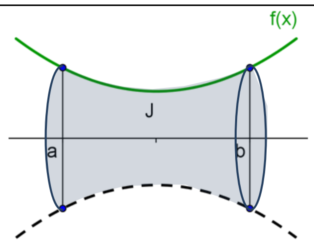
$J = m * r^2$



$J = \rho \int_V r^2\,dV$

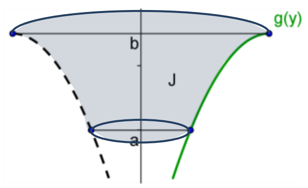
eines Rotationskörper

um x-Achse



$J_x = \frac{1}{2}\pi\rho \int_a^b f(x)^4 dx$

um y-Achse



$J_y = \frac{1}{2}\pi\rho \int_a^b g(y)^4 dy$

Formeln

$M = J * \alpha$	M	Drehmoment
$m = \rho * V$	m	$Masse$
	ρ (rho)	$Dichte$

Beispiele	
Einer Scheibe	$J = \frac{1}{2}m * r^2$