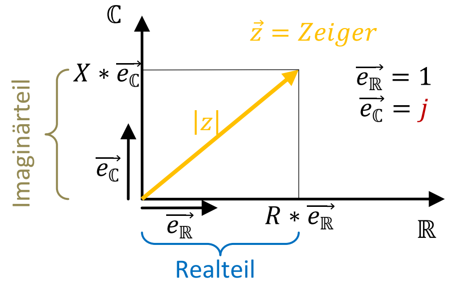
KOMPLEXE ZAHLEN

Algebraische oder kartesische Form



Definition

$$\vec{z} = R * \vec{e_\mathbb{R}} + X * \vec{e_\mathbb{C}}$$
$$\boxed{z = R + X * j}$$

Betrag

$$|z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{z | z = R + X * j \; mit \; R, X \in \mathbb{R}\}$$

Komplexe Zahl j $\boxed{j^2 = -1}$

Zeiger

$$z = \underbrace{R}_{Re(z)} + \underbrace{X}_{Im(z)} * j$$

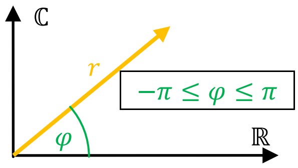
Gleichheit

$$z_1 = z_2$$

wenn:

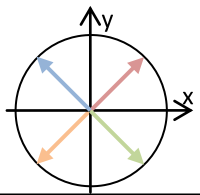
$$R_1 = R_2 \wedge X_1 = X_2$$

Polarformen



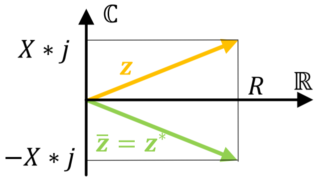
Trigonometrische Form	$z = r(\cos\varphi + j * \sin\varphi)$	**Betrag** $|z|$: $r = \sqrt{R^2 + X^2}$
Exponentialform	$z = r * e^{j\varphi}$	**Argument** $arg(z)$
Eulersche Form	$e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j * \sin\varphi)$	$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$

Winkel φ



$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) + \pi$	$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$	**Taschenrechner gibt** $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	**Periodizität**
$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) - \pi$	$\tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$	**NTB will** $-\pi \leq \varphi \leq \pi$	$z = r * e^{j\varphi}$ $z = r * e^{j\varphi + 2\pi}$

komplex konjugiert



kartesische Form	Exponentialform
$z = R + X * j$ $\bar{z} = z^* = R - X * j$	$z = r * e^{j\varphi}$ $\bar{z} = z^* = r * e^{-j\varphi}$

Potenzen

$j^0 = 1$
$j^1 = j$
$j^2 = -1$
$j^3 = -j$
$j^4 = 1$
$j^5 = j$

Rechenoperationen

	Kartesische Form	Polarform
Addition /Subtraktion	$z_1 \pm z_2 = (R_1 \pm R_2) + j * (X_1 \pm X_2)$ Kommutativgesetz: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	Assoziativgesetz: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
Multiplikation	$z_1 * z_2 = (R_1R_2 - X_1X_2) + (R_1R_2 + X_1X_2)j$ Kommutativgesetz: $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ Distributivgesetz: $z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$	$z_1 * z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j * \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ $|z_1 * z_2| = r_1 * r_2$ $arg(z_1 * z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ $z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$ Assoziativgesetz: $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \frac{z_2^*}{z_2 * z_2^*}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Potenzieren	-	$z^n = r^n * e^{jn\varphi}$ $z^n = r^n * (\cos n\varphi + j * \sin n\varphi)$
Radizieren	-	Jede komplexe Zahl hat n versch. n-te Wurzeln $z_r = \sqrt[n]{r} * e^{\frac{j\varphi + k2\pi}{n}}$

Fundamentalsatz

Gleichung 2ten-Grades	**In ℝ gilt:** **Lösungen: maximal Höhe des Grades**	**In ℂ gilt:** **Eine Gleichung n-ten Grades hat genau n Lösungen**	
$f(x) = x^2 - 1$	$x_0 = 1, -1$	$x_0 = 1, -1$	
$f(x) = x^2$	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$	
$f(x) = x^2 + 1$	$x_0 = \{\ \}$	$x^2 = -1 = j^2$	$x_0 = \pm j$

Hat man nur reelle Koeffizienten und z ist eine Lösung, dann ist z^* auch eine Lösung→ komplexe Lösungen existieren paarweise