LINEARE ABBILDUNGEN (=FUNKTION)

Definition

$f(x+y) = f(x) + f(y)$	Muss durch den Ursprung gehen	
$f(\lambda * x) = \lambda * f(x)$	$f(\vec{0}) = \vec{0}$	
$f(\vec{x}) = A * \vec{x}$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{pmatrix}$	$f(\vec{x})$	Funktion mit Vektor
	A	Abbildungsmatrix (nur Zahlen!!)

Komposition ($\circ =$ *Kringel*) / Umkehrung

Komposition		Umkehrung	
$f_C = f_B \circ f_A$ $x \xrightarrow{f_A} y \xrightarrow{f_B} z$	$z = f_B(f_A(x))$ $= f_B \circ f_A(x)$	$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$	$x = f^{-1}(f(x))$ $= (f^{-1} \circ f)x$
	$z = B * (A * x)$ $= (B * A) * x$		$x = A^{-1}(A * x)$ $= (A^{-1} * A)x$
$B * A$ *ist die Abb.−Matrix von* $f_B \circ f_A$		A^{-1} *ist die Abb.−Matrix von* f^{-1}	

Spezielle lineare Abbildungen

Singuläre Abbildungen	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	Operation kann nicht rückgängig gemacht werden
Null-Abbildung	$A = \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Setzt alles auf null
Projektion auf x	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Projiziert auf die x-Achse
Projektion auf y	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Projiziert auf die y-Achse
Reguläre Abbildungen	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	Operation kann rückgängig gemacht werden
Identität	$A = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	Lässt alles gleich
Orthogonale Abbildung	$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$	Längentreu (und winkeltreu)
Rotationsabbildung (Drehung)	$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$	Drehung um den Winkel φ $\varphi > 0 \rightarrow GUZ$
Streckung um λ	$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	Streckung um den Faktor λ

Koordinatentransformation

1. Neues Koordinatensystem einführen

Erste Achse	Zweite Achse	Dritte Achse
die geg. Achse	Skalarprodukt	Kreuzprodukt
$\vec{z'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$\vec{y'} \perp \vec{z'} \rightarrow \vec{y'} * \vec{z'} = 0$ $z.B. \quad \vec{y'} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$	$\vec{x'} = \vec{y'} \times \vec{z'}$ $\vec{x'} = \begin{pmatrix} -ac \\ bc \\ -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$

2. Einheitsvektoren bilden

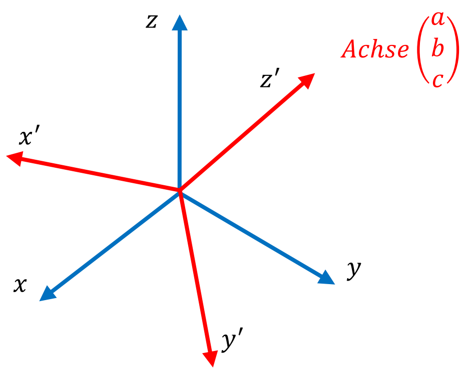
$$\vec{e'_x} = \frac{\vec{x'}}{|\vec{x'}|} \qquad \vec{e'_y} = \frac{\vec{y'}}{|\vec{y'}|} \qquad \vec{e'_z} = \frac{\vec{z'}}{|\vec{z'}|}$$

3. Abbildung, um auf neues Koordinatensystem zu übertragen

$$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z} \rightarrow \vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e'_z}$$

$$A = \begin{pmatrix} \vec{e'_x} & \vec{e'_y} & \vec{e'_z} \end{pmatrix}$$

Rotation von Punkt P um die Achse um φ



4. Transponierte

$$\vec{e'_x}, \vec{e'_y}, \vec{e'_z} \rightarrow \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$$

weil A orthogonal

$$\rightarrow A^{-1} = A^T$$

5. Rotationsmatrix (z.B. φ um die z-Achse)

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ausführen

$$\overbrace{A * R * A^T}^{B} * P$$

- P: Punkt P
- A^T: ins blaue System
- R: Rotation
- A: ins rote System