LINEARE DGL 2.TER ORDNUNG

Lineare DGL 2ter Ordnung

$y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$

$g(x) = 0 \rightarrow DGL\ 1.Ordnung\ durch\ Substitution (z = y')$

$h(x): Störfunktion$

homogen $h(x) = 0$

mit konstanten Koeffizienten

$f(x) = a, \quad g(x) = b$

Lösung mit Nullpunktsatz

1. Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

2. Fallunterscheidung

D	$\lambda_{1,2}$	$y_{hom}(x)$
$D > 0$	$(\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R})$	$= C_1 * e^{\lambda_1 x} + C_2 * e^{\lambda_2 x}$
$D = 0$	$(\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R})$	$= (C_1 x + C_2) * e^{\lambda x}$
$D < 0$	$(\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega \in \mathbb{C})$	$= (C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x) * e^{\alpha x}$

inhomogen $h(x) \neq 0$

mit konstanten Koeffizienten

$f(x) = a, \quad g(x) = b$

nur spezielle Lösung

$y(0) = \cdots, \quad y'(0) = \cdots$

Laplace-Transformation
(für x-ter Ordnung)

1. DGL laplacieren
   - $y''(x) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$
   - $f(x)\,y'(x) \circ\!\!-\!\!\bullet f(x)\ s\,Y(s) - y(0)$
   - $g(x)y(x) \circ\!\!-\!\!\bullet g(x)\ Y(s)$
2. nach $Y(s)$ auflösen
   - $Y(s) = \cdots$
3. Inverse Laplace-Transformation

Aufsuchen einer partikulären Lösung

1. Lösung der homogenen DGL
   - $y_{hom} = \cdots$
2. Ansatz mit $h(x)$ für y_p $(h = h_1 + h_2)$
   - $y_p = (Tab. S. 282)$
   - $y_p' = \cdots$
   - $y_p'' = \cdots$
3. y_p in DGL einsetzen $\rightarrow A, B, C$

   $$y_p'' + a y_p' + b y_p = h(x)$$
4. Alles einsetzen

   $$y_{inh} = y_{hom} + y_p$$

$h(x)$	Unterscheidung	y_p
$Polynom$	$b \neq 0$	$(c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0)$
	$a \neq 0, b = 0$	$x * (c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0)$
	$a = b = 0$	$x^2 * (c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0)$
e^{cx}	$c \neq \lambda_1$ und $c \neq \lambda_2$	$A * e^{cx}$
	$c = \lambda_1$ oder $c = \lambda_2$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$Ax * e^{cx}$
	$c = \lambda_1 = \lambda_2$	$Ax^2 * e^{cx}$
$\sin \beta x$ $\cos \beta x$ $\sin \beta x + \cos \beta x$	$j\beta \neq \lambda_1$ und $j\beta \neq \lambda_2$	$A * \sin \beta x + B * \cos \beta x$ oder: $C * \sin(\beta x + \varphi)$
	$j\beta = \lambda_1$ oder $j\beta = \lambda_2$	$x(A * \sin \beta x + B * \cos \beta x)$ oder: $Cx * \sin(\beta x + \varphi)$