LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME LGLS

Definition	Mehrere Gleichungen (m) mit mehrere Unbekannten (n) nur in der ersten Potenz.	$x^i \to i = 1$
Beispiele	$\begin{vmatrix} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & = 5 \\ 5x_1 & +x_2 & +4x_3 & = 3 \end{vmatrix}$

Lösungsmethoden

Einsetzungsverfahren	$\begin{vmatrix} y = 5 - 2x \\ x + 2y = 5 \end{vmatrix}$ eine nach y auflösen	$\lvert x + 2(5 - 2x) = 5 \rvert$ y einsetzen
Gleichsetzungsverfahren	$\begin{vmatrix} y = 5 - 2x \\ y = \frac{5 - x}{2} \end{vmatrix}$ beide nach y auflösen	$\left\lvert 5 - 2x = \frac{5 - x}{2} \right\rvert$ beide gleichsetzen
Additionsverfahren Subtraktionsverfahren	$* -2 \begin{vmatrix} -4x - 2y = -10 \\ x + 2y = 5 \end{vmatrix}$ eine multiplizieren	$\lvert -3x = -5 \rvert$ beide addieren, subtrahieren

Gauss Algorithmus
(mit Faktor mul/div)
(zueinander add/sub)
(vertauschen)

Gauss-Tableau erstellen:

x_1	x_2	x_3	b	
-1	$+1$	$+1$	0	I
1	-3	-2	5	II
5	1	4	3	III

Obere Dreiecksform

x_1	x_2	x_3	b
-1	$+1$	$+1$	0
0	-2	-1	5
0	0	6	18

Untere Dreiecksform

x_1	x_2	x_3	b
#	0	0	#
#	#	0	#
#	#	#	#

Diagonalform

x_1	x_2	x_3	b	
-1	0	0	1	I
0	-2	0	8	II
0	0	6	18	III

Anzahl Lösungen

```
rank(A)
linalg::rank(A)
det(A)
linalg::det(A)
inv(A)
inverse(A)
```

A ist regulär	A ist singulär
A ist regulär ⇕ $Rang(A) = n$ ⇕ $\det(A) \neq 0$ ⇕ A ist invertierbar	A ist singulär ⇕ $Rang(A) < n$ ⇕ $\det(A) = 0$ ⇕ A ist nicht invertierbar

inhomogenes LGlS

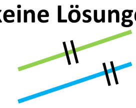
$x_1 \quad x_3 = 0$
$x_1 \quad x_2 = 3$
$x_2 \quad x_3 = 0$
$A * \vec{x} = \vec{b}$

A ist regulär: **eine Lösung**

x_1	x_2	x_3	b
1	0	0	5
0	1	0	3
0	0	1	2

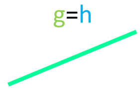
$\vec{x} = A^{-1} * \vec{b}$

A ist singulär: **keine Lösungen**



x_1	x_2	x_3	b
1	0	0	5
1	0	0	3
0	0	0	0

∞ Lösungen g=h

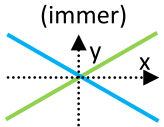


x_1	x_2	x_3	b
1	0	0	5
0	1	0	2
0	0	0	0

homogenes LGlS

$x_1 \quad x_3 = 0$
$x_1 \quad x_2 = 0$
$x_2 \quad x_3 = 0$
$A * \vec{x} = \vec{0}$

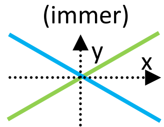
A ist regulär: **triviale Lösung** (immer)



x_1	x_2	x_3	b
2	0	1	0
1	2	0	0
0	1	3	0

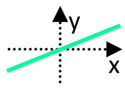
$\vec{x} = \vec{0}$

A ist singulär: **triviale Lösung** (immer)



x_1	x_2	x_3	b
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

∞ Lösungen g=h



x_1	x_2	x_3	b
1	0	5	0
0	1	4	0
0	0	0	0

Reduzierte Zeilen-Staffel-Form „rre-Form“

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
1	0	0	2	3	5	I
0	1	0	7	3	4	II
0	0	1	3	8	6	III
	0			0	0	IV
					0	V

1. Variablen für x_4 bis x_5 wählen:	$x_4 = s$; $x_5 = t$
2. bekannte Variablen: Gleichung aufstellen $x_n = b_n - (x_4 * s) - (x_5 * t)$	$x_1 = 5 - 2s - 3t$ $x_2 = 4 - 7s - 3t$ $x_3 = 6 - 3s - 8t$
3. Lösungsvektor aufstellen $\vec{x} = (b) + s * (x_4) + t * (x_5)$	$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise (Schlusskontrolle)

$$A * \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$