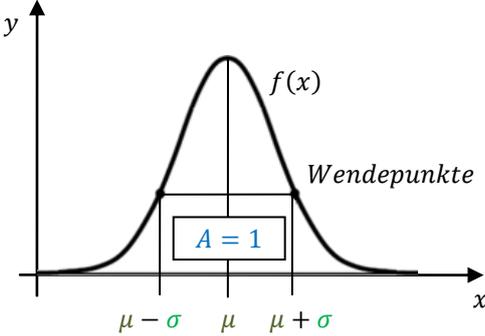
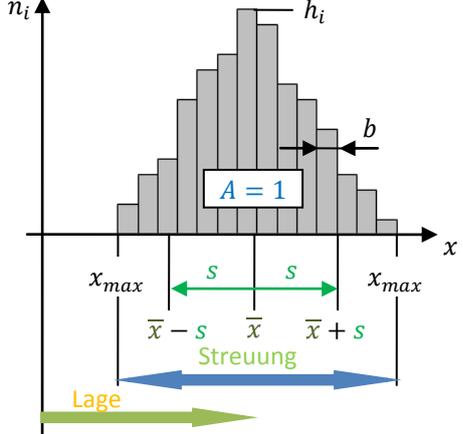
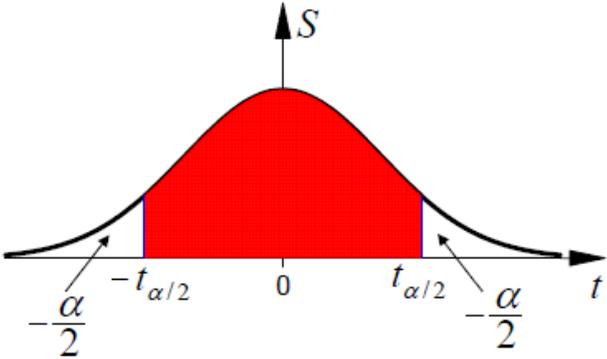


# SYS\_A - ANALYSIEREN

## Statistik

Gaußsche Normalverteilung (Theorie)		Histogramm (Praxis)	
<p><b>Gebrauch:</b> bei <math>n &gt; 100</math></p>  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * \sigma} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$			
<p><b>Realisierung</b></p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \mu$ $\lim_{n \rightarrow \infty} s = \sigma$			
$X$	Zufallsvariable	$n$	Anzahl Messungen
$f(x)$	Dichte der Normalverteilung	$m$	Klassen $\approx \sqrt{n}$
$F(x)$	Verteilungsfunktion Fläche unter $f(x)$ „monoton steigend“	$b$	Klassenbreite $= \frac{R_{max} - R_{min}}{m}$
$A$	Fläche der Normalverteilung	$h_i$	Klassenhöhe $= r_i/b$
$\mu$	Erwartungswert	$n_i$	Absolute Häufigkeit
$\sigma$	Standardabweichung von X	$r_i$	relative Häufigkeit $= n_i/n$
$\sigma^2$	Varianz von X	$A$	Fläche des Histogramm $= \sum_{i=1}^n b * h_i = 1$
	Standardnormalverteilung $\sigma = 1$ und $\mu = 0$	$\bar{x}$	Mittelwert arithm. Mittel $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
	<b>Wahrscheinlichkeiten</b>	$s$	emp. Standardabweichung $= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_x(t) dt$	$s^2$	empirische Varianz
	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68.3\%$	$s_x$	emp. Standardabweichung des Mittelwertes $= \frac{s}{\sqrt{n}}$
	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 95.5\%$	10x genauer = 100x mehr Messwerte	
	$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 99.7\%$	<b>Mehrere Histogramme (für <math>x \rightarrow \infty</math>)</b>	
		Mittelwerte addieren $\bar{x}_c = \bar{x}_a + \bar{x}_b$	
		Varianzen addieren $s_c^2 = s_a^2 + s_b^2$	
		Standardabweichung $s_c = \sqrt{s_a^2 + s_b^2}$	

Student t-Verteilung	
<p><b>Gebrauch:</b> bei <math>n &lt; 30</math> (<math>30 &lt; n &lt; 100</math> empfohlen)</p> 	
<p><b>Zufallsvariable T</b></p> $T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ <p>im Vertrauensintervall <math>[-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2}]</math></p>	
<p><b>Sicherheitswahrscheinlichkeit S</b></p> $S = P(-t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = P\left(-t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq t_{\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	
<p><b>Irrtumswahrscheinlichkeit alpha</b></p> $\alpha = 1 - S$	
<p><b>Freiheitsgrad v</b></p> $v = n - 1$	
<p><b>Weitere Verteilungsarten</b></p> <p>Gleichverteilung, Exponentialverteilung, Dreiecksverteilung</p>	

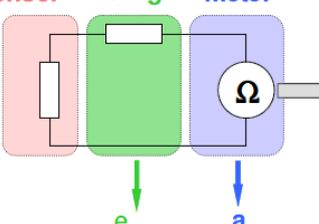
**Messunsicherheit**

**Messergebnis**

$m_{korr} \pm U$	$m_{korr}$	Korrigierter Mittelwert (bester Schätzwert)						
	$U$	Erweiterte Unsicherheit (Streuung)						
$m - e_{sys} \pm k \cdot u_c$	$m = \bar{x}$	Arithmetischer Mittelwert						
	$e_{sys}$	Bekannte systematische Abweichung						
	$k$	Erweiterungsfaktor ( $\approx \dots * \sigma$ )						
	$u_c$	Kombinierte Standardunsicherheit Typ C						
Messgerät zu ungenau $u_B \gg u_A$	 $u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$	$u_A$	Standardunsicherheit Typ A (statistische Analyse)					
Messgerät optimal $u_B = u_A$		$u_B$	Standardunsicherheit Typ B (Messgeräte, -aufbau, -verfahren)					
Messgerät zu genau $u_B \ll u_A$								
$s^2$ : <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>Dreiecksverteilung</td><td><math>\sqrt{6}</math></td></tr> <tr><td>Rechteckverteilung</td><td><math>\sqrt{3}</math></td></tr> <tr><td>U-förmige Verteilung</td><td><math>\sqrt{2}</math></td></tr> </table> $u_A = t * \frac{s}{\sqrt{n}}$ $u_A = t * s_x$	Dreiecksverteilung	$\sqrt{6}$	Rechteckverteilung	$\sqrt{3}$	U-förmige Verteilung	$\sqrt{2}$	$t$	Vertrauensfaktor (bei $n < 100, t \neq 1$ )
	Dreiecksverteilung	$\sqrt{6}$						
	Rechteckverteilung	$\sqrt{3}$						
	U-förmige Verteilung	$\sqrt{2}$						
		$s^2$	Varianzen					
	$u_E$	Empfindlichkeitsabweichung						
	$u_N$	Nullpunktabweichung						

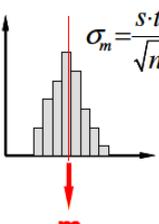
Angaben des Herstellers oder Kalibrierzertifikate	Bereich mit Vertrauensniveau	keine weiteren Angaben	digitale Anzeigen $x\% + y \text{ dgts}$	Messunsicherheitsanteile
$u_B = \frac{\text{Wert}}{k}$	$u_B = \frac{U}{t}$	$u_B = \frac{a}{s^2}$	$u_B = \sqrt{u_E^2 + u_N^2}$	$u_B = \sqrt{\frac{(a_0^2 + a_a^2 + a_r^2 + a_u^2)}{(s^2)^2}}$
Wert: Angabe k: Erweiterungsfaktor ( $\approx \dots * \sigma$ )	U: Unsicherheit t: aus Tabelle	a: Garantiefehler	$u_E = \frac{x * m}{s^2}$ $u_N = \frac{\text{Aufl.} * y}{s^2}$	$a_0$ : Nullpunktabweichung $a_a$ : Schwankung der Anzeige $a_r$ : Auflösung der Anzeige $a_u$ : Umgebungseinflüsse

**Temperatur- Zuleitung Ohm-meter**



$e_{sys}$     $a$

140.12
140.13
140.19
140.08
140.11
140.12
140.09
140.10
140.11



$\sigma_m = \frac{s \cdot t}{\sqrt{n}}$

**Vorgehen nach GUM**

- $e_{sys}$
- $m_{korr}$
- $u_A$
- $u_B$
- $u_c$
- $U$
- Vollst. Messergebnis

**Faktor 10 Regel**  
Messunsicherheit des Messgerät höchstens  $1/10$  der geforderten Messunsicherheit

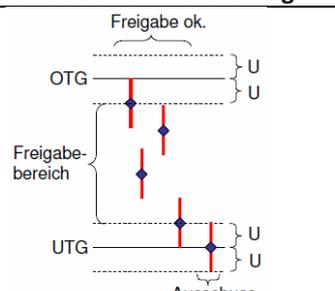
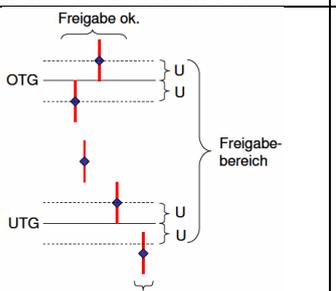
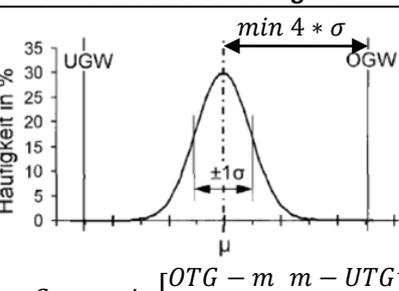
**Fortpflanzungsgesetz**

<b>Idee</b>	Das Messergebnis F soll eine Funktion von N Teilmesswerten $f_i$ sein <span style="float: right;"><math>F = F(f_1, f_2, \dots, f_n)</math></span>		
<b>Gesetze</b>	<table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <b>Multiplikation und Division</b> <math>F = f_1 * f_2</math> und <math>F = f_1 / f_2</math>  <math display="block">\left(\frac{u(F)}{m(F)}\right)^2 = \left(\frac{u(f_1)}{m(f_1)}\right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{m(f_2)}\right)^2</math> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top;"> <b>Addition und Subtraktion</b> <math>F = f_1 \pm f_2</math>  <math display="block">u(F)^2 = u(f_1)^2 + u(f_2)^2</math> </td> </tr> </table>	<b>Multiplikation und Division</b> $F = f_1 * f_2$ und $F = f_1 / f_2$ $\left(\frac{u(F)}{m(F)}\right)^2 = \left(\frac{u(f_1)}{m(f_1)}\right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{m(f_2)}\right)^2$	<b>Addition und Subtraktion</b> $F = f_1 \pm f_2$ $u(F)^2 = u(f_1)^2 + u(f_2)^2$
<b>Multiplikation und Division</b> $F = f_1 * f_2$ und $F = f_1 / f_2$ $\left(\frac{u(F)}{m(F)}\right)^2 = \left(\frac{u(f_1)}{m(f_1)}\right)^2 + \left(\frac{u(f_2)}{m(f_2)}\right)^2$	<b>Addition und Subtraktion</b> $F = f_1 \pm f_2$ $u(F)^2 = u(f_1)^2 + u(f_2)^2$		

**Messwesen**

**Kalibrieren:** Vergleichen von Sekundärnormale mit anderen Messgeräten oder Referenzmaterialien.

**Eichen:** Bestätigen, dass ein Messmittel den gesetzlichen Anforderungen entspricht.

<b>Kontrolle vor Auslieferung</b>	<b>Kontrolle vom Kunden</b>	<b>Kennzahlen der Prozessfähigkeit</b>	
 <p>Freigabe ok. OTG UTG Ausschuss</p>	 <p>Freigabe ok. OTG UTG Ausschuss</p>	 <p>Häufigkeit in % UGW   <math>\min 4 * \sigma</math>   OGW <math>\pm 1\sigma</math> <math>\mu</math></p> $C_{pk} = \min \left[ \frac{OTG - m}{3s}, \frac{m - UTG}{3s} \right]$	$C_p = \frac{OTG - UTG}{6s}$  $C_{pk} > 1.33$
Messunsicherheit reduziert Toleranz			

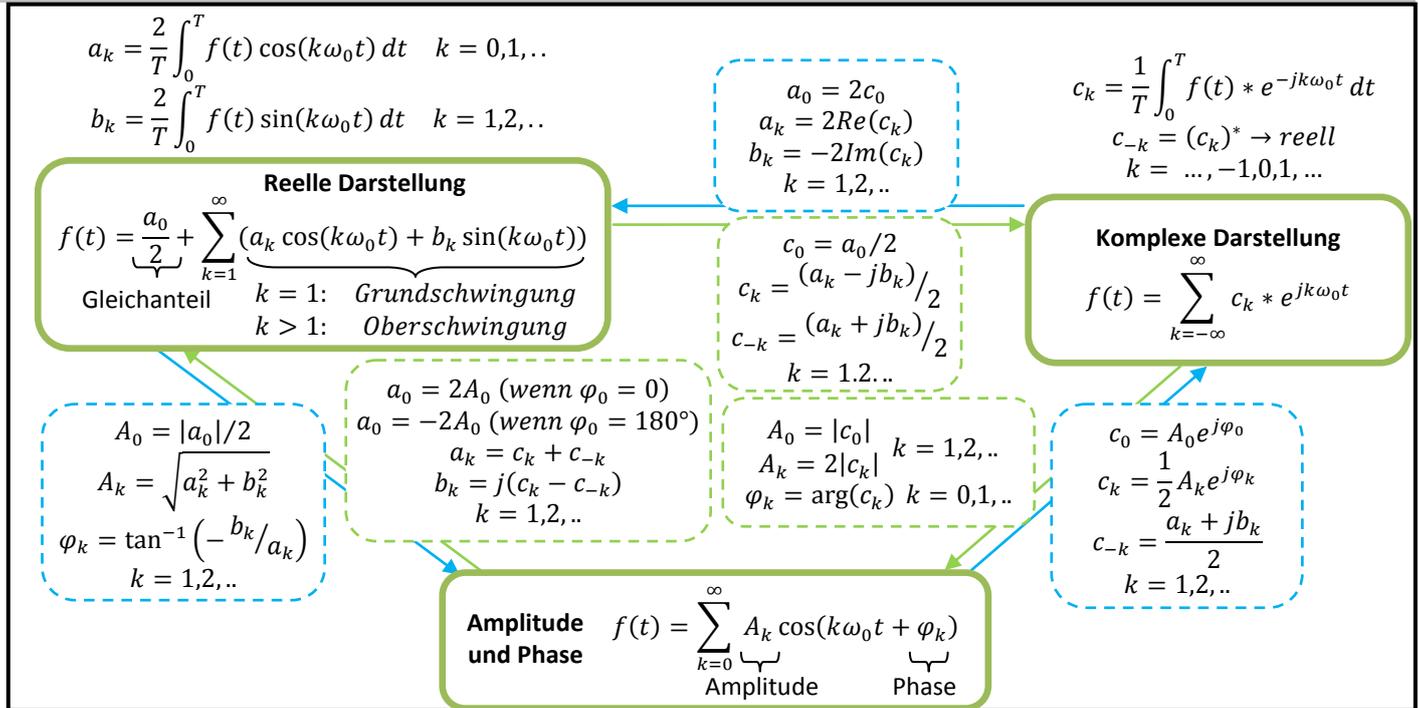
**Fourier-Reihen**

Jede periodische Funktion lässt sich als unendliche Summe von trigonometrischen Funktionen schreiben!

**Fourier-Polynom**

1. Funktion	$f(t)$ sei periodisch mit Periode $T$				
	$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t \in [-1,0) \\ 1 & \text{für } t \in [0,1) \end{cases}$				
	$T = 2$	$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \pi$ $\omega_0 = \text{ggT}(\dots)$		
2. Gleichanteil	Mittelwert der Funktion: $a_0/2 = 0$				
3. Fourier-Spektrum (Gesamtheit der Fourier-Koeffizienten)	<b>Gerade Funktionen:</b> $f(t) = f(-t)$ $\rightarrow b_k = 0, \quad c_k = c_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{R}$				
	<b>Ungerade Funktionen:</b> $f(t) = -f(-t)$ $\rightarrow a_k = 0, \quad c_k = -c_{-k}, \quad c_k \in \mathbb{C}$				
	$k =$	1	2	3	...
	$a_k$	0	0	0	...
	$b_k$	$4/\pi$	0	$4/3\pi$	...
4. Grundschwingung	$f_1(x) = 4/\pi \sin(\pi * x)$				
5. Oberschwingungen	$f_3(x) = 4/3\pi \sin(3\pi * x)$ $f_5(x) = 4/5\pi \sin(5\pi * x)$				
6. Fourier-Polynom	Fourier-Reihe mit endlichen Summanden z. B. 9, $f_{1-9} = f_1 + f_2 + \dots + f_9$				

**Fourier-Reihen**



**Filter**

<p><b>Tiefpassfilter</b></p> <p>Lässt tiefe Frequenzen (fast) unverändert, dämpft hohe Fourier-Koeffizienten</p>	<p><b>Hochpassfilter</b></p> <p>Lässt hohe Frequenzen (fast) unverändert, dämpft tiefe Fourier-Koeffizienten</p>	<p><b>Idealer Tiefpass</b></p> <p>(lässt Frequenzen bis <math>f_{\text{Grenz}} = K * f_0</math> unverändert durch)</p> $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k c_k e^{jk\omega_0 t}$ $g_k = \begin{cases} 1 & \text{für }  k  \leq K \\ 0 & \text{für }  k  > K \end{cases}$
<p><b>Bandpassfilter</b> Dämpft bis auf ein Frequenzband tiefe und hohe Frequenzanteile</p>		
<p><b>Fourier-Koeffizienten Idealer Filter</b></p>		

**Fourier Transformation**

**Kontinuierliche Fourier-Transformation**

**Verallgemeinerung der Fourier-Reihe für nicht periodische Signale!**

$f(t)$		$\hat{f}(\omega)$
Konstante $A$	○ — ●	Dirac-Stoss $2\pi A * \delta(\omega)$
Dirac-Stoss $A\delta(t)$	○ — ●	Konstante $A$
Rechteck-Fenster $\{A,  t  \leq 0.5T_0\}$ $\{0,  t  > 0.5T_0\}$	○ — ●	$A \frac{2 \sin(\frac{T_0}{2} \omega)}{\omega}$
$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}$	○ — ●	Idealer Tiefpass $\{1,  \omega  \leq \omega_0\}$ $\{0,  \omega  > \omega_0\}$

Dirac-Stoss:  $\delta(t) = \lim_{T_0 \rightarrow 0} rect(t)$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$       $\delta(t) = 0$  für  $t \neq 0$

- Fourier-Transformation ist linear
- **Reelle f(t):**  $f(t)$  = gerade, wenn  $\hat{f}(\omega)$  reell und gerade ist  
 $f(t)$  = ungerade, wenn  $\hat{f}(\omega)$  imaginär und ungerade ist
- Spektrallinie im Fourierspektrum = komplexe Exponentialfunktion mit der entsprechenden Frequenz
- Die Fourier-Transformierte der sin, cos Funktion besteht jeweils aus zwei Spektrallinien bei  $\omega$  und  $-\omega$

**Diskrete Fourier-Transformation**

**Berechnung der Fourier-Koeffizienten aus Funktionswerten von nicht periodischen, bandlimitierten Signalen!**

Messdauer

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-jkn2\pi/N}$$

DFT

**Funktionswerte im Zeitbereich**

 $f[n] = f(n * \Delta t)$   
 $n \in \mathbb{C}$

**Funktionswerte im Frequenzbereich**

 $\hat{f}[k] = c_m * N$       $m: 0..K$   
 $c_{m-2K-1} * N$       $m: (K+1)..(2K)$   
 $k \in \mathbb{C}$

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] e^{jkn2\pi/N}$$

IDFT

↕

**Fourier-Koeffizienten**

$k > 0$	$k \geq 1$	oder $c_{-k} = c_k^*$
$c_k = \frac{\hat{f}[k]}{N}$	$c_{-k} = \frac{\hat{f}[2K+1-k]}{N}$	

- Funktion muss **bandlimitiert** sein (endliche Fourier-Koeff.)  
 $\hat{f}(\omega) = 0$  für  $|\omega| > 2\pi f_{max}$   
 $c_k = 0$  für  $|k| > f_{max}/f_0$
- $f(t)$  ist eindeutig bestimmt durch  $N = 2K + 1$  Fourier-Koeffizienten
- Verlustfrei = Signale bis zu  $f_{max}$  zu detektieren:  
 $f_{max} < f_{Nyquist}$
- Für reelle Funktionen ( $c_{-k} = c_k^*$ )
- $\omega_{max} = \max(\omega_1, \omega_2, \dots)$

$k, n = 0, \dots, N - 1$	Indizes
$N = T * f_s$	Anzahl Samples (Punkte)
$f_{max} = k * f_0$	Grenzfrequenz
$f_{Nyquist} = 0.5f_s$	Nyquist-Frequenz
$f_s = N/T = N * f_0$	Sampling-Frequenz
$\Delta t = 1/f_s = T/N$	Abtastintervall
$\Delta f = 1/Messdauer$	Abtastfrequenz
$t_i = i * \Delta t$	Stützstellen

Problem	Folge	Lösung
<b>Aliasing</b> wenn $f_{max} > f_{Nyquist}$ = wenn Theorem von Shannon nicht eingehalten wird	Amplitudenspektrum wird an der Nyquist-Frequenz gespiegelt → nicht das „richtige“ Spektrum	Mit einem analogen Tiefpassfilter das Signal filtern, um Aliasing zu vermeiden  Nach dem Samplen kann das Spektrum nicht mehr repariert werden
<b>Leackage (lecken)</b>	keine ganze Anzahl an Perioden → Abrupte Übergänge	neue Spektrallinien  Fensterfunktionen Amplitude leidet, verschmiert
<b>Verschmieren</b>	mehrere Peaks da Keule breiter als die Funktion	falsche Amplitude  grössere Messdauer oder grösseres Fenster (Effekt zu klein) Zero-Padding

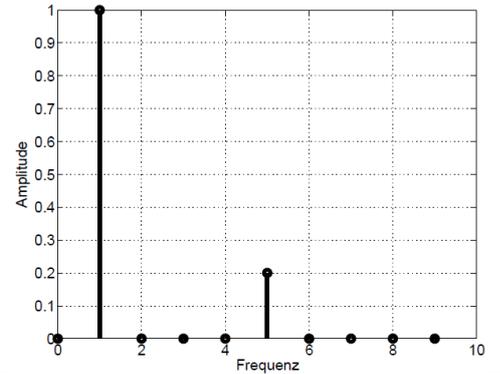
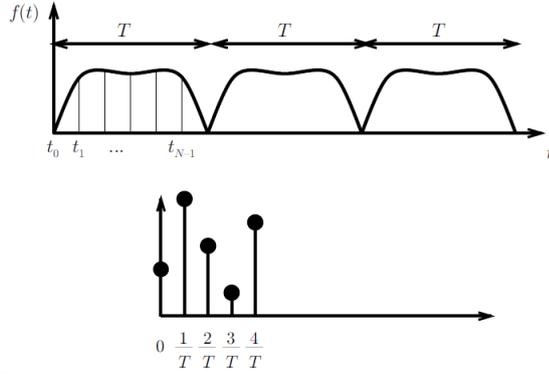
**Samplen von mehreren Perioden**

**1 Periode**

$$f_{Nyquist} = 0.5f_s$$

$$N = T * f_s$$

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$



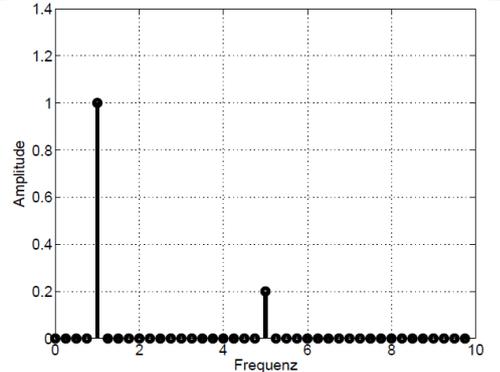
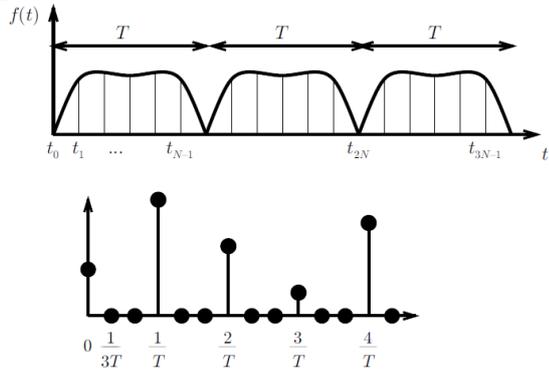
**3 Perioden**

$$f_{Nyquist} = 0.5f_s$$

$$N = 3T * f_s$$

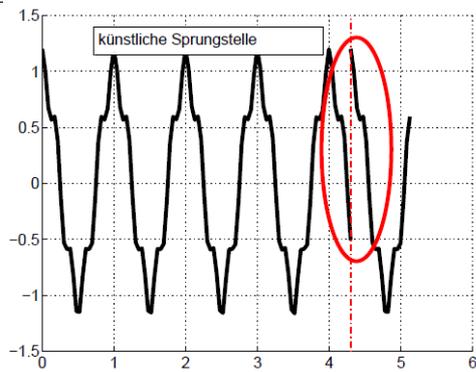
$$\Delta f = \frac{1}{3T}$$

Frequenzauflösung wird vergrößert.

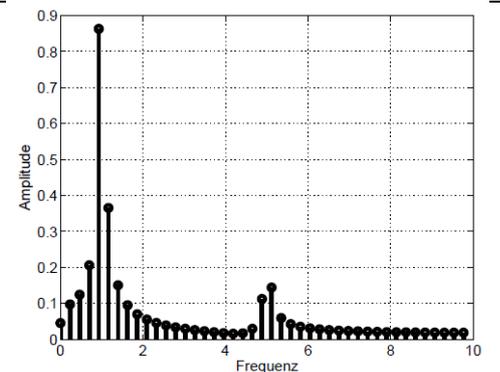


**falsche Periode**

(nicht genau eine Periode)



Entstehung einer künstlichen Sprungstelle



Spektrum wird verschmiert