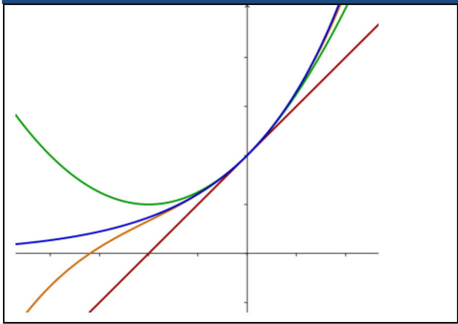
TAYLOR-POLYNOME

Taylor-Reihe der Funktion e^x bei $x_0 = 0$



$f(x)$	e^x	Funktion
$p_1(x, x_o = 0)$	$x+1$	Tangente / Linearisierung • Lineare Näherung • Potenzreihenentw. 1.Grades
$p_2(x, x_0 = 0)$	$\frac{1}{2}x^2 + x + 1$	Schmiegeparabel • Quadratische Näherung • Potenzreihenentw. 2.Grades
$p_3(x, x_0 = 0)$	$\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$	Potenzreihenentwicklung 3.Grades

Herleitung

Tangente, Linearisierung		Schmiegeparabel		Potenzreihenentwicklung 3ten Grades	
$f(x) = p_1(x)$ $e^x = ax + b$	$bei\ x_0 = 0$	$f(x) = p_2(x)$ $e^x = ax^2 + bx + c$	$bei\ x_0 = 0$	$f(x) = p_3(x)$ $e^x = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$bei\ x_0 = 0$
$f(0) = p_1(0)$ $f'(0) = p_1'(0)$	$\rightarrow b = 1$ $\rightarrow a = 1$	$f(0) = p_2(0)$ $f'(0) = p_2'(0)$ $f''(0) = p_2''(0)$	$\rightarrow c = 1$ $\rightarrow b = 1$ $\rightarrow a = 1/2$	$f(0) = p_3(0)$ $f'(0) = p_3'(0)$ $f''(0) = p_3''(0)$ $f'''(0) = p_3'''(0)$	$\rightarrow d = 1$ $\rightarrow c = 1$ $\rightarrow b = 1/2$ $\rightarrow a = 1/6$

Potenzreihenentwicklung n-ten Grades / Satz von Taylor

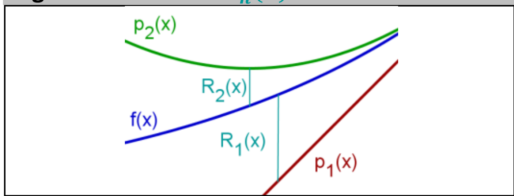
${p_n}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$	Sei $f(x)$ eine $(n+1)$mal differenzierbare Funktion, dann lässt sich $f(x)$ um das Entwicklungszentrum x_0 entwickeln.

Taylor-Reihe

$$f(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x - x_0)^n$$

Eigenschaften von $R_n(x)$



$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in [x_i, x_0]$$

$$R_n(x) > R_{n+1}(x), \qquad \text{wobei } x \approx x_0$$

Bekannte Funktionen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$