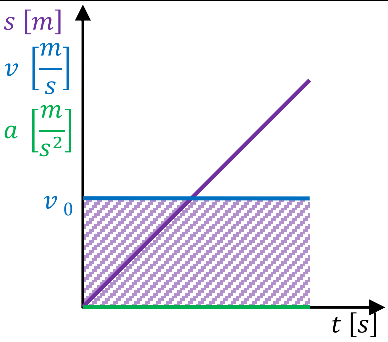
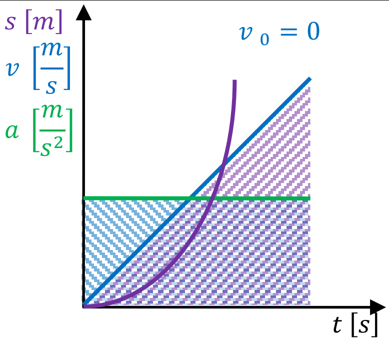
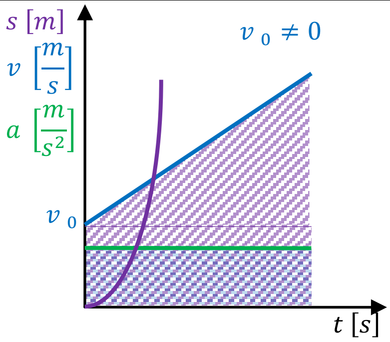
# TRANSLATIVE UND ROTATIVE BEWEGUNGEN

## Geradlinige Bewegung (Bewegung in einer Dimension)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ | $\Delta\,\vec{s}$ | Verschiebung | $[\Delta\,\vec{s}] = \mathrm{m}$ | $s(t) = s_0 + v_0 * t + \frac{a * t^2}{2}$ | Fläche unter **v** |
| $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ | $\vec{v}$ | Geschwindigkeit | $[\vec{v}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ | $v(t) = v_0 + a * t = \dot{s}(t)$ | Steigung von **s** |
| | $\vec{a}$ | Beschleunigung | $[\vec{a}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ | $a(t) = a = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ | Steigung von **v**<br>Änderungsrate von **s** |
| | $\Delta\,t$ | Zeitintervall | $[\Delta\,\vec{t}] = \mathrm{s}$ | | |

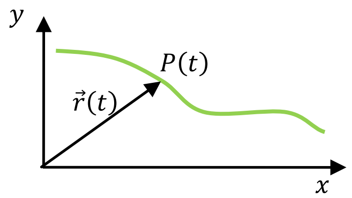
## Diagramme

| Geradlinig gleichförmig | Geradlinig gleichförmig beschleunigt | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\vec{s} = \vec{v} * t$<br>$\vec{v} = konstant = v_0 + \vec{a} * t$<br>$\vec{a} = \vec{0}$ | $\vec{s} = \frac{\vec{v} * t}{2} = \frac{\vec{a} * t^2}{2}$<br>$\vec{v} = \vec{a} * t$<br>$\vec{a} = konstant$ | $\vec{s} = \vec{v_0} * t + \frac{\overrightarrow{\Delta v} * t}{2} = \vec{v_0} * t + \frac{\vec{a} * t^2}{2}$<br>$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} * t$<br>$\vec{a} = konstant$ |



## Krummlinige Bewegung (Bewegung in zwei/drei Dimensionen)

### Ortsvektor





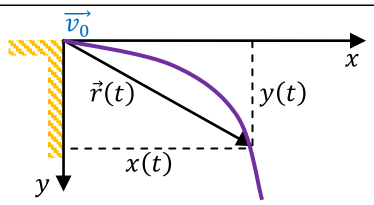
Ein Ortsvektor zeigt vom Nullpunkt zum Ort, wo sich der Massenpunkt zum Zeitpunkt t befindet.

| | |
|---|---|
| $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$<br>$= \text{tangential } zu\ y(x)$ | $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$<br>$= nicht\ tangential\ zu\ y(x)$ |

Jede krummlinige Bewegung ist eine beschleunigte Bewegung!

### Der schräge Wurf

#### Der horizontale Abwurf

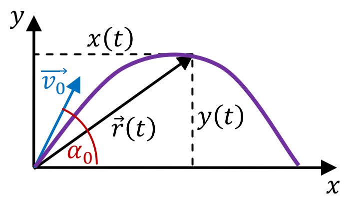




$$y(x) = \frac{g * x^2}{2 * {v_0}^2}$$

| x-Richtung | y-Richtung | Summe |
|---|---|---|
| $a_x = 0$ | $a_y = g = konst.$ | $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$ |
| $v_x = v_0 = konst.$ | $v_y = g * t$ | $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ g * t \end{pmatrix}$ |
| $x = v_0 * t$ | $y = \frac{g * t^2}{2}$ | $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 * t \\ \frac{g * t^2}{2} \end{pmatrix}$ |

#### Der schräge Abwurf

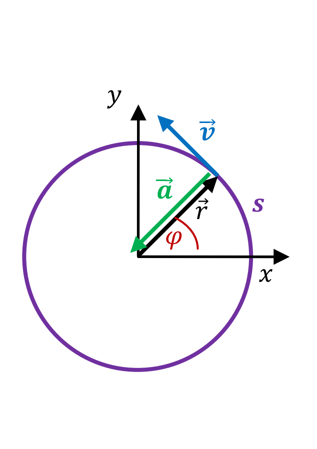




$$y(x) = x \tan(\alpha_0) - \frac{g * x^2}{\cos^2(\alpha_0) * {v_0}^2}$$

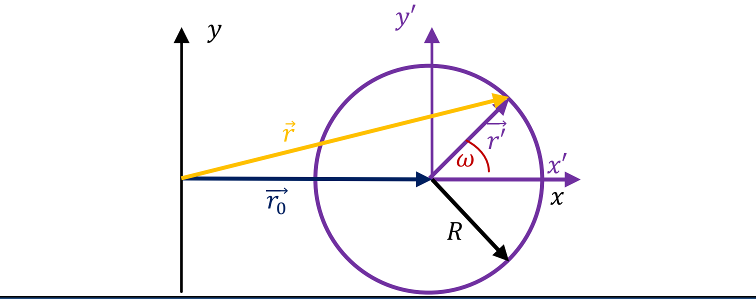
| x-Richtung | y-Richtung | Summe |
|---|---|---|
| $a_x = 0$ | $a_y = -g = konst.$ | $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ |
| $v_x = v_0 \cos(\alpha_0)$<br>$= konst.$ | $v_y = v_0 \sin(\alpha_0) - g * t$ | $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha_0) \\ v_0 \sin(\alpha_0) - g * t \end{pmatrix}$ |
| $x = v_0 \cos(\alpha_0)\, t$ | $y = v_0 \sin(\alpha_0)\, t - \frac{g * t^2}{2}$ | $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha_0)\, t \\ v_0 \sin(\alpha_0)\, t - \frac{g * t^2}{2} \end{pmatrix}$ |

**Kreisbewegung**




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s = r * \varphi$ | $\vec r$ | Radius | m | $\vec r = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix}$ |
| | **s** | Bogenlänge | m | $s(t) = r * \varphi(t)$ |
| | **φ** | Winkel | [rad] Bogenmass | $\varphi(°) = \frac{180°}{\pi}\varphi(\mathrm{rad})$ |
| $v = r * \omega$<br>$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ | **ω** | Winkelgeschwindigkeit | $[\omega] = \frac{rad}{s}$ | $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ |
| | **v** | Geschwindigkeit | $[v] = \frac{m}{s}$ | $\vec v = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ |
| $a = r * \alpha$<br>$\alpha = r * \omega^2$<br>$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ | **α** | Winkelbeschleunigung | $[\alpha] = \frac{rad}{s^2}$ | $\alpha = \frac{d\varphi}{dt}$ |
| | **a** | Beschleunigung | $[a] = \frac{m}{s^2}$ | $\vec a = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix}$ |
| $F_{zp} = m * \omega^2 * r$ | $F_{zp}$ | Zentripetalkraft | $[F_{zp}] = N$ | $F_{zp} \uparrow\downarrow \vec r$ |

**Zusammengesetzte Bewegung**




$$\vec r(t) = \vec{r_0}(t) + \vec{r'}(t)$$

$$\vec r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec r(t) = \begin{pmatrix} v_0 * t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R * \cos\omega t \\ R * \sin\omega t \end{pmatrix}$$

## Drehbewegung von Massenpunkten und starren Körpern

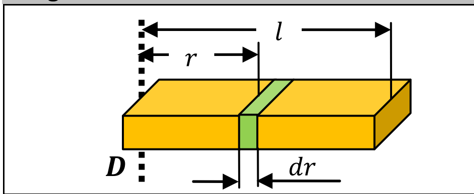
**Elementare Zusammenhänge bei Drehbewegungen**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\vec\varphi$ | Winkel | $[\vec\varphi] = rad$ | $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 * t + \frac{\alpha * t^2}{2}$ | **Periodendauer**<br>$T = \frac{2\pi}{\omega}$ |
| $\vec\omega$ | Winkelgeschwindigkeit | $[\vec\omega] = \frac{rad}{s}$ | $\omega(t) = \omega_0 + \alpha * t = \dot\varphi(t)$ | |
| $\vec\alpha$ | Winkelbeschleunigung | $[\vec\alpha] = \frac{rad}{s^2}$ | $\alpha(t) = \alpha = \dot\omega(t) = \ddot\varphi(t)$ | |

**Newton's Aktionsprinzip für Drehbewegungen**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $J = mr^2$ | $J = \int_m r^2 * dm$ | Massenträgheitsmoment einer Punktmassen | $[J] = kg * m^2$ |
| $\vec M = J * \vec\alpha$ | $M = \int_m r^2 dm * \vec\alpha$ | Newton's Aktionsprinzip für Drehbewegungen | $[M] = Nm^2$ |

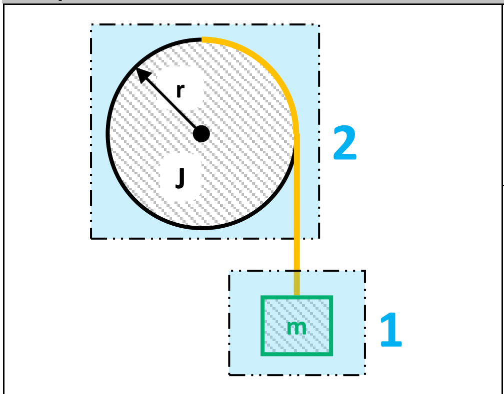
**Trägheitsmomente**

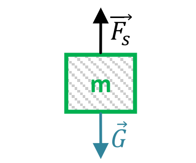
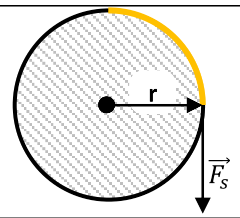


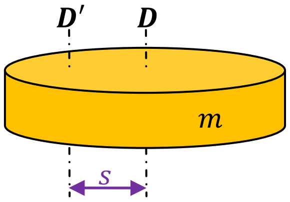

$$J = \int_{Masse} r^2 dm = \int_{Volumen} r^2 \rho\, dV = \int_0^l r^2 \rho A\, dr = \frac{\rho A}{3}\Big[r^3\Big]_0^l = \frac{\rho A}{3} l^3$$

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

**Beispiel**




| | | |
|---|---|---|
| System<br>**1**<br>**linear Translation** |  | $\sum_i \vec{F_i} = m * \vec a$<br>$G - F_s = m * a$<br>$m * g - F_s = m * a$ |
| System<br>**2**<br>**drehend Rotation** |  | $\sum_i \vec{M_i} = J * \vec\alpha$<br>$F_s * r = J * \alpha$<br>$F_s * r = J * \frac{a}{r}$ |

| Satz von Steiner | | Kombinationssatz |
|---|---|---|
|  | $J' = J_s + ms^2$<br>$D \parallel D'$ | Besteht ein Körper aus mehreren Teilkörpern, ist das Massenträgheitsmoment die Summe einzelnen Trägheitsmomente. |

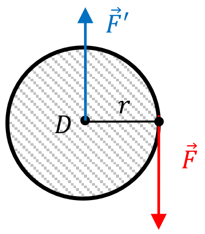
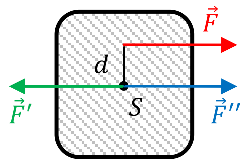
## Drehachsen

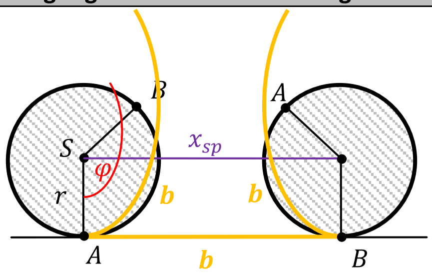
| | | |
|---|---|---|
| $\infty$ | Drehachsen | beliebig |
| $\infty$ | Schwerpunktachsen | Achsen durch den Schwerpunkt |
| 3 | Hauptträgheitsachsen | Achsen, bei der der Körper ausgewuchtet ist |
| 2 | freie Achsen | minimales und maximales Trägheitsmoment der Hauptträgheitsachse |

## Arbeit, Energie, Leistung bei Drehbewegungen

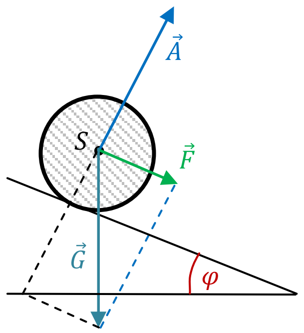
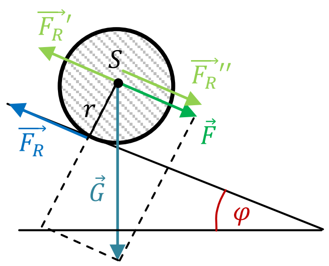
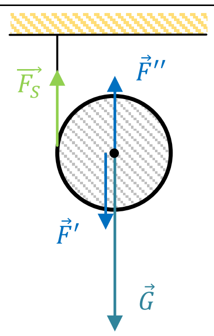
| | | |
|---|---|---|
| $W = \vec{M} * \vec{\varphi}$ | $W_{rot} = \frac{J}{2}\omega^2$ | $P = M * \omega$ |

# Rotation und Translation

| | gelagert | frei |
|---|---|---|
| |  |  mit 2 Ergänzungsgrössen (**Dyname**) von F ergänzen |
| Rotation | Körper beginnt zu drehen: $M = r * F$ | Körper beginnt zu drehen: $M = d * F$ |
| Translation | keine: $\vec{F} = \vec{F}'$ | F'' in Schwerpunkt $\vec{F}''$ |

| Rollbedingungen bei ebener Unterlage | |
|---|---|
|  | $x_{sp} = b$ |
| | $x_{sp} = r * \varphi$ |
| | $v_{sp} = r * \omega$ |
| | $a_{sp} = r * \alpha$ |

| Rollen | <-> | Gleiten |
|---|---|---|
| | Vollzylinder | |
| $F_R$ | < | $F_{R,voll}$ |
| $\frac{1}{3} m * g * \sin\varphi$ | < | $\mu_0 * m * g * \cos\varphi$ |
| $\tan\varphi$ | < | $3\mu_0$ |

| Zylinder auf schiefer Ebene | ohne Reibung | mit Reibung | Maxwell'sches Rad |
|---|---|---|---|
| |  |  |  |
| Translation | $\vec{F}$ | $\vec{F}$ und $\vec{F_R}'$ | $\vec{G}$ und $\vec{F}''$ |
| Rotation | keine, (reines Gleiten) | $\vec{F_R}$ und $\vec{F_R}''$ | $\vec{F_S}$ und $\vec{F}'$ |
| Formeln | $\sum F = \vec{F} = \vec{G} + \vec{A} = m * \vec{a}$ | $\sum M = r * F_R = J * \alpha$<br>$\sum F = F - F_R = m * a$ | $\sum F = \vec{G} - \vec{F_S} = m * a$<br>$\sum M = F_S * r = J * \alpha$<br>$J = \frac{1}{2} m * r^2$ |
| | $a = g * \sin\varphi$ | $a = r * \alpha$ | $a = \frac{2}{3} g$ |